



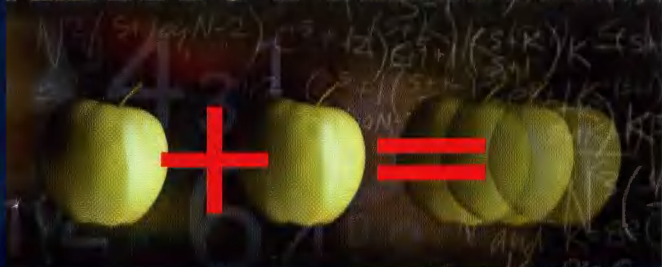
ПРИЛОЖЕНИЕ К ЖУРНАЛУ

КВАНТ

№ 1 / 2009

*В ПОМОЩЬ*

АБИТУРИЕНТАМ



Б Ю Р О



КВАНТУМ

Приложение к журналу

«КВАНТ»

№1/2009

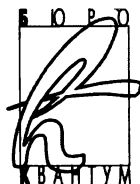
---

*В ПОМОЩЬ*  
**АБИТУРИЕНТАМ**

Составители

В.И.Голубев, А.А.Егоров,

В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан



Москва

2009

УДК 373.167.1:[51+53]  
ББК 22.1я721+22.3я721  
В11

Приложение  
к журналу «Квант»  
№1/2009



**В11    Впомощь абитуриентам** / Составители В.И.Голубев, А.А.Егоров, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан. – М.: Бюро Квантум, 2009. – 208 с. (Приложение к журналу «Квант» №1/2009.)

ISBN 978-5-85843-086-5

Книга представляет собой сборник статей по математике и физике, опубликованных в журнале «Квант» в рубрике «Практикум абитуриента» в течение нескольких последних лет.

Для старшеклассников и выпускников средних школ, лицеев и гимназий, для слушателей подготовительных отделений и курсов, а также для тех, кто самостоятельно готовится к единому государственному экзамену и к конкурсным экзаменам в вуз.

ББК 22.1я721+22.3я721

ISBN 978-5-85843-086-5

© Бюро Квантум, 2009

# СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
СТАТЬИ ПО МАТЕМАТИКЕ	
Арифметические текстовые задачи на конкурсном экзамене. <i>И. Шарыгин</i>	5
Иррациональные уравнения. <i>А. Егоров, Ж. Раббот</i>	13
Иррациональные неравенства. <i>А. Егоров, Ж. Раббот</i>	25
Монотонные функции в конкурсных задачах. <i>А. Егоров, Ж. Раббот</i>	42
Метод замены множителей. <i>В. Голубев</i>	61
О модуле квадратного трехчлена. <i>В. Голубев</i>	72
Четвертый признак равенства треугольников. <i>А. Егоров</i>	81
Геометрические места точек на плоскости и в пространстве. <i>А. Заславский</i>	88
Об одном случае расположения сферы и пирамиды. <i>В. Мирошин</i>	95
СТАТЬИ ПО ФИЗИКЕ	
О динамике криволинейного движения. <i>В. Плис</i>	102
Несколько задач на закон сохранения механической энергии. <i>А. Черноуцан</i>	113
Центр масс механической системы. <i>В. Можжев</i>	124
Работа газа при переходе из начального состояния в конечное. <i>В. Можжев</i>	133
Теплоемкость равновесных тепловых процессов. <i>В. Можжев</i>	143
Диэлектрики в электрическом поле. <i>В. Можжев</i>	152
Закон электромагнитной индукции. <i>В. Дроздов</i>	164
Энергетический метод исследования колебаний. <i>А. Черноуцан</i>	174
Интерференция света. <i>В. Можжев</i>	185
Ответы, указания, решения	199

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В этом приложении к журналу «Квант» собраны статьи по математике и физике раздела «Практикум абитуриента» за последние несколько лет.

Редколлегия журнала продолжает вести этот раздел, невзирая на почти тотальный переход к ЕГЭ. Как уже отмечалось в предисловии к предыдущему приложению, в котором были собраны задачи вступительных экзаменов и вузовских олимпиад 2008 года, только углубленное изучение физики и математики, а не тупое «натаскивание» по тестам, может дать гарантию успешного преодоления вступительного барьера и спокойного обучения на первых курсах института.

Углубленное понимание предмета достигается, в первую очередь, через решение интересных задач различного уровня. На первом этапе рекомендуется решать задачи не вразброд – в виде тренировочных вариантов (этим лучше заняться перед экзаменом), а большими блоками на заданную тему, продвигаясь от простых задач к более сложным. Именно по этому принципу построены статьи раздела «Практикум абитуриента».

Важный совет – не идите по пути наименьшего сопротивления, просто читая текст и пассивно следуя за мыслью автора, а работайте над статьей «с карандашом в руках», сначала пытайтесь решить задачу самостоятельно и только потом сверяя свое решение с авторским. И еще: «проработав» статью, обязательно попробуйте решить предложенные в конце упражнения – вы поймете, насколько вам удалось овладеть материалом.

Желаем успехов!

### АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ НА КОНКУРСНОМ ЭКЗАМЕНЕ

*И. Шарыгин*

- Это задача, собственно говоря, алгебраическая, – говорит он. – Ее с иксом и игреком решить можно.
- И без алгебры решить можно, – говорит Удодов, протягивая руку к счетам и вздыхая.
- Вот-с... по-нашему, по-неученому.

А. П. Чехов. Репетитор

Давным-давно, в доброе старое время, любили в школе текстовые арифметические задачи. Методам их решения, зачастую весьма изощренным, учили долго и тщательно, и умения эти сохранялись на всю жизнь. При этом школа не только учила методам, но и воспитывала вкус – арифметическое решение считалось более красивым, чем алгебраическое. Впрочем, и сегодня для любого мало-мальски математически воспитанного человека арифметические решения алгебраических задач, равно как и геометрические решения задач по геометрии, выглядят куда как привлекательнее алгебраических решений.

Здесь самое время вспомнить задачу, поставившую в тупик репетитора Егора Зиберова.

**Задача 1.** *«Купец купил 138 арш. черного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 руб. за аршин, а черное 3 руб.»*

По всей видимости, Удодов-старший решал ее следующим образом. 138 арш. черного сукна стоят  $138 \cdot 3 = 414$  руб. Разница  $540 - 414 = 126$  руб. получается за счет синего, каждый метр которого на 2 руб. дороже. Следовательно, синего сукна было  $126:2 = 63$  арш., а черного было  $138 - 63 = 75$  арш.

Интересно, что будет, если подобную задачу дать на конкурсном экзамене? Нет, мы не сомневаемся в том, что... впрочем, лучше сказать – мы надеемся на то, что подавляющее большинство абитуриентов успешно справится с этой задачей. Но вряд ли найдется хотя бы одно решение, подобное приведенному. У

некоторых даже возникнет вопрос: а разве так можно? Вся выучка выпускника восстает против таких решений. Лучше, во всяком случае, спокойнее решать эту задачу как обычно — с «иксом» и «игреком».

Тем не менее, изредка на конкурсных экзаменах встречаются текстовые задачи, предполагающие именно арифметические решения. Кроме того, бывают ситуации, когда здравые арифметические соображения могут существенно упростить процесс решения. О такого рода задачах мы и расскажем в этой статье.

**Задача 2.** *На реке расположены пункты  $A$  и  $B$ , причем  $B$  ниже по течению на расстоянии 20 км от  $A$ . Катер направляется из  $A$  в  $B$ , затем сразу возвращается в  $A$  и снова следует в  $B$ . Одновременно с катером из  $A$  отправился плот. При возвращении из  $B$  катер встретил плот в 4 км от  $A$ . На каком расстоянии от  $A$  катер нагонит плот, следуя вторично в  $B$ ?*

**Решение.** Заметим, что катер удаляется от плота или приближается к нему с одной и той же скоростью — своей скоростью относительно воды. Следовательно, время, которое катер плыл от  $A$  до  $B$ , удаляясь от плота, равно времени, которое катер плыл от  $B$  до встречи с плотом. Значит, отношение путей, пройденных катером от  $A$  до  $B$  и от  $B$  до плота, равно отношению его скоростей по и против течения, т. е. отношению скоростей равно  $20/16 = 5/4$ . Таким же и по тем же соображениям будет отношение путей, пройденных катером от  $A$  до второй встречи с плотом и от первой встречи до  $A$ . Таким образом, катер нагонит плот в 5 км от  $A$ .

**Задача 3.** *На реке расположены пункты  $A$  и  $B$ . Одновременно из этих пунктов навстречу друг другу отходят два одинаковых катера, которые встречаются в некотором пункте, обмениваются почтой и возвращаются обратно. Катер, вышедший из  $A$ , возвращается обратно через 1 ч после выхода. Если бы катер, отправляющийся из  $A$ , вышел на 15 мин раньше катера, отправляющегося из  $B$ , то встреча произошла бы на равном расстоянии от обоих пунктов. Через сколько времени возвращается обратно катер, выходящий из пункта  $B$ ?*

**Решение.** Заметим, что момент возвращения катера в  $A$  полностью определяется лишь моментом выхода катера из  $B$ , равно как и возвращение катера в  $B$  определяется моментом выхода катера из  $A$ . Чтобы понять это, достаточно представить себе, что в точке встречи они не обмениваются почтой, а продолжают движение в противоположный пункт. Следовательно, во второй раз катер, вышедший из  $A$ , вернулся бы обратно через 1 ч 15 мин после выхода, т. е. на полпути из  $A$  в  $B$ , и обратно

ему нужно 1 ч 15 мин, а на весь путь 2 ч 30 мин. Таким образом, катер, выходящий из *B*, возвращается обратно через 1 ч 30 мин.

Во многих сборниках конкурсных задач можно встретить следующую задачу.

**Задача 4.** Имеются два слитка с массами  $m$  кг и  $n$  кг с различным процентным содержанием меди. От каждого слитка отделяется кусок, причем эти куски имеют равную массу, и сплавляются с оставшейся частью другого слитка. Какой массы куски следует отрезать от каждого слитка, чтобы процентное содержание меди в новых слитках было бы равным?

**Решение.** Безусловно, эта задача легко решается стандартным образом при помощи уравнений. Правда, при этом надо не испугаться того, что число неизвестных (три) будет больше числа уравнений (одно). Как ни странно, более общим методом решения в данном случае будет арифметический. Более общим в том смысле, что он безболезненно проходит для любого числа слитков, в то время как алгебраический метод приводит к громоздким, трудно обозримым вычислениям.

На самом деле данная задача – обычная арифметическая задача «на части». В каждый из вновь образовавшихся слитков части исходных должны войти в отношении  $m:n$ . (Подумайте, почему.) Значит, в новом слитке массой в  $m$  кг содержится  $m$  равных частей из первого слитка (массой  $m$  кг) и  $n$  таких же частей из второго слитка. Масса одной части равна  $\frac{m}{m+n}$  кг. Остаток от первого слитка в этом новом слитке равен  $\frac{m}{m+n} m = \frac{m^2}{m+n}$  кг, а отрезанная часть второго равна  $\frac{mn}{m+n}$  кг. Такую же часть надо отрезать от первого слитка.

Рассмотрим теперь несколько задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах в вузы.

**Задача 5.** Пятеро благородных рыбаков занимались ловлей рыбы. По окончании лова первому показалось, что он поймал больше остальных, и он разделил между ними поровну  $1/3$  своей добычи. После этого стало ясно, что у второго оказалось больше рыбы, чем у остальных, и он разделил между всеми остальными поровну  $1/3$  всей оказавшейся у него рыбы. Известно, что общий улов составляет 6 кг 400 г и что в результате описанных процедур он разделился поровну. Определите первоначальный улов каждого из рыбаков.

**Решение.** Данная задача – типичный пример арифметической задачи, решаемой с конца. В конце у каждого рыбака



оказалось по 1 кг 280 г рыбы. Значит, у второго рыбака, перед тем как он делился с остальными, было в  $3/2$  раза больше рыбы, а именно — 1 кг 920 г. Значит, у каждого из четырех оставшихся рыбаков в это время было по 1 кг 280 г —  $640 \text{ г} : 4 = 1 \text{ кг } 120 \text{ г}$ . Рассуждая таким же образом, найдем, что улов первого рыбака равнялся 1 кг 680 г, второго — 1 кг 780 г, а у каждого из трех оставшихся — по 980 г.

**Задача 6.** В порту для загрузки танкеров имеются три трубопровода. По первому из них закачивается в час 300 тонн нефти, по второму — 400 тонн, по третьему — 500 тонн. Нужно загрузить два танкера. Если загрузку производить первыми двумя трубопроводами, подключив к одному из танкеров первый трубопровод, а к другому танкеру второй трубопровод, то загрузка обоих танкеров при наиболее быстром из двух возможных способов подключения займет 12 часов. При этом какой-то из танкеров, может быть, окажется заполненным раньше, и тогда подключенный к нему трубопровод отключается и в дальнейшей загрузке не используется. Если бы вместимость меньшего по объему танкера была вдвое больше, чем на самом деле, и загрузка производилась бы вторым и третьим трубопроводами, то при быстрейшем способе подключения загрузка заняла бы 14 часов. Определите, сколько тонн нефти вмещает каждый из танкеров.

**Решение.** Очевидно, что более производительный трубопровод следует подключить к танкеру с большей вместимостью. Поскольку один из двух танкеров был заполнен ровно за 12 часов, то либо меньший вмещает  $12 \cdot 300 = 3600$  тонн нефти, либо больший  $12 \cdot 400 = 4800$ . Первый случай невозможен, так как при удвоении вместимости меньшего танкера получаем 7200 тонн, а для заполнения такого танкера даже третьим трубопроводом требуется более 14 часов. Следовательно, больший танкер вмещает 4800 тонн и заполняется вторым и, тем более, третьим трубопроводом быстрее чем за 14 часов. Значит, меньший танкер вмещает  $\frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 500 = 3500$  тонн.

Самое главное в этой задаче — не испугаться громоздкого условия, подойти к ней с позиции обычного здравого смысла.

Минимальный здравый смысл и понимание, что такое «процент», — вот все необходимое для решения следующей задачи.

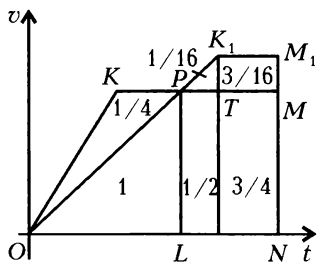
**Задача 7.** В сообщении о лыжном кроссе сказано, что процент числа членов группы, принявших участие в кроссе, заключен в пределах от 96,8% до 97,2%. Определите минимально возможное число членов такой группы.

**Решение.** Процент не участвовавших в кроссе заключен в пределах от 2,8% до 3,2%. Если бы в кроссе не участвовал 1 человек (меньше уже нельзя), то число членов группы заключалось бы в пределах от  $1 \cdot \frac{100}{2,8} = 35,7\dots$  до  $1 \cdot \frac{100}{3,2} = 31,2\dots$ , т.е. минимальное число членов группы будет 32 человека. Понятно, что при меньшем числе членов группы 3,2% от этого числа будет меньше 1, а по условию в кроссе не участвовал по крайней мере один человек.

Следующая задача не совсем соответствует теме статьи, поскольку при ее решении больше используются геометрические, чем арифметические методы. Мы включили ее по двум причинам. Во-первых, при ее решении не используются ни уравнения, ни другие соотношения, содержащие неизвестные. Во-вторых, иллюстрируется один весьма полезный метод решения задач на движение – графическая интерпретация.

**Задача 8.** Из пунктов *A* и *B* навстречу друг другу вышли одновременно два поезда. Каждый из них двигался сначала равноускоренно (начальные скорости поездов равны нулю, ускорения различны), а затем, достигнув некоторой скорости, – равномерно. Отношения скоростей равномерного движения поездов равно  $5/4$ . В некоторый момент времени скорости поездов оказались равными, а один из них прошел к этому времени расстояние в  $5/4$  раза больше, чем другой. В пункты *B* и *A* поезда прибыли одновременно. Какую часть пути прошел каждый из поездов к тому моменту, когда их скорости оказались равными?

**Решение.** Рассмотрим графики, изображающие зависимость скорости от времени для каждого поезда. При этом можно считать, что оба поезда вышли из одного пункта. Для одного поезда графиком является ломаная *ОКМ*, для другого – *ОК<sub>1</sub>М<sub>1</sub>* (см. рисунок). Длина пройденного пути к



определенному моменту времени одним из поездов равна площади фигуры, ограниченной снизу отрезком оси *t* и соответствующей частью графика его скорости сверху. По условию площади трапеций *ОКМN* и *ОК<sub>1</sub>М<sub>1</sub>N* равны, значит, равновелики и фигуры *ОКР* и *РК<sub>1</sub>М<sub>1</sub>М*. Площадь *ОКPL* равна  $5/4$  площади *ОPL* (по условию). Если площадь *ОPL* равна 1, то площадь *ОКР* есть  $1/4$ ; площадь *РК<sub>1</sub>T* равна  $1/16$ , поскольку

$K_1T = \frac{1}{4}PL$  (по условию отношение скоростей равномерного движения равно  $5/4$ , т.е.  $M_1N = \frac{5}{4}PL$ ), а треугольники  $OPL$  и  $PK_1T$  подобны. Далее из равновеликости  $OKP$  и  $PK_1M_1M$  находим площадь прямоугольника  $TK_1M_1M$ . Она равна  $\frac{3}{16}$ . Затем находим площади двух оставшихся прямоугольников. Весь путь (он равен площади  $OKMN$  или  $OK_1M_1N$ ) равен  $2\frac{1}{2}$ . Поскольку площади трапеции  $OKPL$  и треугольника  $OPL$  равны  $\frac{5}{4}$  и 1 соответственно, то в момент равенства скоростей (точка  $P$ ) один поезд прошел  $\frac{1}{2}$  пути, а другой  $\frac{2}{5}$ .

И в заключение рассмотрим задачу, которая, по существу, является арифметической, поскольку решение основано на свойствах делимости натуральных чисел, хотя для удобства мы все же введем неизвестные. По содержанию эта задача скорее олимпиадная, чем конкурсная.

**Задача 9.** У восьми школьников в сумме имеется 719 рублей. Известно, что у любых двух из них различные суммы денег, но у одного из них в целое число раз больше денег, чем у другого. Сколько денег у каждого школьника?

**Решение.** Пусть  $x_1$  — наименьшая сумма,  $x_1x_2$  — вторая по величине, ...,  $x_1x_2...x_8$  — наибольшая сумма. По условию  $x_i \neq 1$  при  $i > 1$ ,  $x_1 + x_1x_2 + ... + x_1x_2...x_8 = 719$ . Число 719 — простое, следовательно,  $x_1 = 1$ . Далее имеем  $x_2 + x_2x_3 + ... + x_2x_3...x_8 = 718 = 2 \cdot 359$ . Таким образом,  $x_2 = 2$ . Затем получим  $x_3 = x_4 = 2$  и  $x_5 + x_5x_6 + x_5x_6x_7 + x_5x_6x_7x_8 = 88 \cdot x_5$  — делитель 88. Если  $x_5 = 2$ , то  $x_6 + x_6x_7 + x_6x_7x_8 = 43$ . Число 43 — простое, а  $x_6 \neq 1$ , значит,  $x_5 \neq 2$ . При  $x_5 = 4$  найдем  $x_6 = 3$ ,  $x_7 = x_8 = 2$ . Другие значения  $x_5$  не подойдут.

Итак, школьники имели 1, 2, 4, 8, 32, 96, 192, 384 рубля соответственно.

### Задачи для самостоятельного решения

1. На овощной базе имелся крыжовник, влажность которого составляла 99%. За время хранения его влажность уменьшилась на 1% (стала 98%). На сколько процентов уменьшилась масса хранившегося на базе крыжовника?

2. Автомобиль проезжает путь от  $A$  до  $B$  за 1 час. Автомобиль выехал из  $A$ , и одновременно из  $B$  вышел пешеход. Автомобиль

встретил пешехода, довез его до  $A$  и затем прибыл в  $B$ , затратив на весь путь 2 ч 40 мин. За какое время может пройти весь путь от  $B$  до  $A$  пешеход?

3. Теплоход проходит путь от  $A$  до  $B$  по течению за 3 часа, а возвращается обратно за 4 часа. За какое время преодолеют путь от  $A$  до  $B$  плывущие со скоростью течения плоты?

4. Поезд, следующий из пункта  $A$  в пункт  $B$ , делает по пути несколько остановок. На первой остановке в поезд садятся 5 пассажиров, а на каждой следующей – на 10 пассажиров больше. На каждой остановке 50 пассажиров выходят из поезда. Возможен ли случай, когда в пункт  $B$  прибывает менее 336 пассажиров, если из пункта  $A$  их выезжает 462?

5. В сообщении о лыжном кроссе сказано, что процент числа участников кросса, не уложившихся в норматив, заключен от 94,2% до 94,4%. Каково наименьшее число участников кросса?

6. Автобус на пути из  $A$  в  $B$  делает 5 остановок по 10 мин через каждые 16 км (расстояние от  $A$  до  $B$  равно 96 км), скорость автобуса равна 65 км/ч. Одновременно с автобусом из  $B$  навстречу ему выезжает велосипедист со скоростью 21 км/ч. На каком расстоянии от  $A$  автобус встретится с велосипедистом?

7. Пассажирский поезд проходит мимо столба за 6 секунд. За какое время пройдут друг мимо друга скорый и пассажирский поезда, если скорость скорого поезда в  $3/2$  раза больше скорости пассажирского, а длина пассажирского в  $4/3$  раза больше длины скорого?

8. Работа началась между 9 и 10 часами утра, а закончилась между 15 и 16 часами того же дня. Определите продолжительность работы, если в момент начала и в момент окончания работы минутная и часовая стрелки были перпендикулярны.

9. Один рабочий может изготовить партию деталей за 12 часов. Работу начал один рабочий, через 1 час к нему присоединился второй, еще через час – третий и т.д., пока работа не была выполнена. Сколько времени проработал первый рабочий? (Производительность труда всех рабочих одинакова.)

10. Имеются три слитка массой 2, 3 и 5 кг с различным содержанием меди. Каждый слиток разделен на три части, и из девяти получившихся кусков получены три слитка массой 2, 3 и 5 кг с равным содержанием меди. На какие части следует разделить исходные слитки, чтобы гарантировать равное процентное содержание меди в получившихся слитках независимо от содержания ее в исходных слитках?

11. Три школьника делят между собой орехи. Сначала первый школьник дал каждому из двух других по одной четвер-

ти имевшихся у него орехов и еще пол-ореха. Затем второй дал каждому из двух других по одной четверти оказавшихся у него орехов и еще пол-ореха. Затем то же сделал третий школьник. В результате у каждого оказалось по 30 орехов. Сколько орехов было у каждого школьника первоначально?

**12.** Имеются два сосуда. В одном содержится 3 л 100%-й кислоты, а в другом – 2 л воды. Из первого сосуда во второй перелили один стакан кислоты, а затем из второго в первый – один стакан смеси. Эту операцию повторили еще три раза. В результате во втором сосуде оказалась кислота крепостью 42%. Сколько процентов кислоты содержится теперь в первом сосуде?

**13.** Пункт *B* находится выше по течению, чем пункт *A*, на расстоянии 4,5 км от *A*. Скорость течения реки 3 км/ч. Двигаясь в стоячей воде, гребец идет со скоростью 5 км/ч. Гребец вышел из *A*, доплыл до *B* и вернулся в *A*. Через равные промежутки времени гребец отдыхал в течение 10 мин (в это время лодка плывет по течению), а всего таких перерывов оказалось 8. Через сколько времени гребец вернулся обратно в *A*?

## ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

*А.Егоров, Ж.Раббот*

Иррациональные уравнения (и неравенства) довольно часто становятся «камнем преткновения» на вступительных экзаменах. О некоторых методах их решения мы и поговорим, причем, в основном, будем иметь дело с квадратными корнями (радикалами). Как правило, такая задача решается, если нам удастся избавиться от радикалов и свести ее к «обычным» уравнениям, не содержащим корней.

### Простейшие уравнения

Так мы будем называть уравнения вида

$$1) \quad \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$$

и

$$2) \quad \sqrt{f(x)} = g(x).$$

Именно к ним сводится в итоге решение большинства уравнений, связанных с квадратными корнями. Избавиться от радикалов в простейших уравнениях можно, возведя их почленно в квадрат. Однако при этом могут появиться посторонние корни, так что надо еще позаботиться об их отсеве.

*Уравнение первого типа* равносильно каждой из двух систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases}$$

поскольку после возведения в квадрат получаем уравнение-следствие  $f(x) = g(x)$ . Мы должны, решив его, выяснить, принадлежат ли найденные корни области определения исходного уравнения, т.е. выполняется ли неравенство  $f(x) \geq 0$  (или  $g(x) \geq 0$ ). На практике из этих систем выбирают для решения ту, в которой неравенство проще.

Рассмотрим пример.

**Пример 1.** Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 - x - 1} = \sqrt{2x^2 - 2}.$$

**Решение.** Находим корни уравнения  $f(x) = g(x)$ :

$$x^2 + x - 1 = 0, \quad x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Поскольку для корней нашего квадратного уравнения  $x^2 - 1 = -x$ , неравенство

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0$$

выполняется при  $x_2 < 0$  и не выполняется при  $x_1 > 0$ .

**Ответ:**  $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ .

Обратите внимание на то, что мы при отборе корней обошлись, по сути дела, без непосредственных вычислений.

*Уравнение второго типа* равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Школьники довольно часто добавляют к этой системе неравенство  $f(x) \geq 0$ . Однако обычно этого делать не нужно (и даже опасно, особенно в задачах с параметром), поскольку условие  $f(x) \geq 0$  автоматически выполняется для корней уравнения  $f(x) = g^2(x)$ , в правой части которого стоит неотрицательное выражение — квадрат функции  $g(x)$ .

**Пример 2.** Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - x - 2} = x - 1.$$

**Решение.** После возведения в квадрат получаем уравнение  $2x^2 + x - 3 = 0$ . Его корни  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -3/2$ . Условию  $x \geq 1$  удовлетворяет лишь  $x = 1$ .

**Ответ:** 1.

**Пример 3.** Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 2x - 1} = 2x + 1.$$

**Решение.** После возведения в квадрат и упрощений получаем уравнение

$$x^2 + 6x + 2 = 0$$

с корнями  $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{7}$ . Условию  $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1/2$  удовлетворяет лишь корень «с плюсом». В этом

можно убедиться, заметив, что  $-3 + \sqrt{7} > -3 + \sqrt{6,25} = -3 + 2,5 = -1/2$ . Но можно поступить и так: поскольку при  $x = -1/2$  значение квадратного трехчлена отрицательно:

$$f(x) = x^2 + 6x + 2 = (-1/2)^2 - 3 + 2 < 0,$$

число  $x = -1/2$  лежит между его корнями  $x_1$  и  $x_2$ .

Такой прием иногда также избавляет от необходимости проводить не очень сложные, но порой утомительные вычисления.

**Ответ:**  $-3 + \sqrt{7}$ .

### Упражнение 1. Решите уравнения

а)  $\sqrt{3x-1} = \sqrt{x-2}$ ;

б)  $\sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{2x^2 - 1}$ ;

в)  $\sqrt{x^2 - 5x - 14} = \sqrt{3x - 2}$ ;

г)  $\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{x - 4}$ ;

д)  $\sqrt{x+1} = x-1$ ;

е)  $\sqrt{2x+1} = 2x^2 - x - 1$ ;

ж)  $\sqrt{6 - 4x - x^2} = x + 4$ ;

з)  $8\sqrt{12 + 16x - 16x^2} + 4x - 4x^2 = 3$ .

### Более сложные уравнения

Если в уравнении имеется несколько радикалов или же их нагромождение вроде  $\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}}$  и т.п., первоначальной целью является избавление от них, что достигается возведением в квадрат (может быть, неоднократно) с тем, чтобы в конце концов прийти к уравнениям, которые мы умеем решать.

**Пример 4.** Решите уравнение

$$\sqrt{8x+9} - \sqrt{7x-5} = 2.$$

**Решение.** Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{8x+9} = 2 + \sqrt{7x-5}$$

и возведем в квадрат. После упрощений получим простейшее уравнение

$$4\sqrt{7x-5} = x + 10, \quad (1)$$

или, после повторного возведения в квадрат,

$$x^2 - 92x + 180 = 0. \quad (2)$$



Возводить в квадрат число 46 без калькулятора — занятие довольно неприятное. Поэтому попробуем угадать корень. Легко понять (просто перебирая первые квадраты: 1, 4, 9, 16, 25, ... и приравнивая им двучлен  $7x - 5$  — «наименьшее» из подкоренных выражений), что  $x_1 = 2$  удовлетворяет уравнению (1), а значит — и (2). По теореме Виета второй корень уравнения (2) — это  $x_2 = 90$ , причем оба корня удовлетворяют второму, а следовательно, и исходному уравнению.

*Замечание.* Вообще в случаях, когда корни, получаемые в результате последовательных возведений в квадрат, достаточно простые (например, целые), можно не заботиться о равносильности переходов и в конце решения просто проверить их прямой подстановкой. В более сложных случаях, когда прямая проверка затруднена, приходится тщательно следить за возможностью появления посторонних корней.

**Пример 5.** Решите уравнение

$$\sqrt{3x-1} - \sqrt{x-2} = 3.$$

**Первое решение.** Переписываем уравнение так:

$$\sqrt{3x-1} = 3 + \sqrt{x-2}.$$

Возводим в квадрат и упрощаем:

$$3\sqrt{x-2} = x - 4.$$

Повторное возведение в квадрат дает уравнение

$$x^2 - 17x + 34 = 0$$

с корнями  $x_{1,2} = \frac{17 \pm 3\sqrt{17}}{2}$ .

Неравенству  $x \geq 4$  удовлетворяет лишь  $x = \frac{17 + 3\sqrt{17}}{2}$ . (Можно подставить  $x = 4$  в трехчлен  $x^2 - 17x + 34$  — см. конец решения примера 3.)

**Второе решение.** Выполним замену  $t = \sqrt{x-2} \geq 0$ , откуда  $x = t^2 + 2$ . Приводим уравнение к виду

$$\sqrt{3t^2 + 5} = 3 + t.$$

После возведения в квадрат и упрощений получаем

$$t^2 - 3t - 2 = 0, \tag{3}$$

откуда  $t_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$  (второй корень  $t_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$  отрицателен).

Теперь вычисляем корень исходного уравнения:

$$x = t^2 + 2 = 3t + 4 = \frac{17 + 3\sqrt{17}}{2}$$

(мы опять воспользовались уравнением (3), для корней которого верно, что  $t^2 + 2 = 3t + 4$ ).

**Ответ:**  $\frac{17 + 3\sqrt{17}}{2}$ .

Вообще же подстановка вида  $t = \sqrt{ax + b} \geq 0$  часто упрощает решение уравнений вида

$$\sqrt{ax + b} \pm \sqrt{cx + d} = e.$$

После замены получаем уравнение вида  $\sqrt{kt^2 + n} = mt + p$ . Существенно здесь то, что при решении квадратного уравнения

$$At^2 + Bt + C = 0,$$

к которому приходим после однократного возведения последнего уравнения в квадрат, приходится выявлять лишь неотрицательные корни, что также достаточно просто.

Рассмотрим еще два уравнения с «двухэтажными радикалами».

**Пример 6.** Решите уравнение

$$\sqrt{2 - \sqrt{x + 1}} + \sqrt{2 + \sqrt{x + 1}} = 2\sqrt{x}.$$

**Решение.** Возведя уравнение в квадрат и приведя подобные члены, получаем простейшее уравнение

$$\sqrt{3 - x} = 2(x - 1),$$

решая которое, приходим к ответу.

**Ответ:**  $\frac{7 + \sqrt{33}}{8}$ .

**Пример 7.** Решите уравнение

$$\sqrt{x + \sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = 2.$$

**Решение.** Пусть  $t = \sqrt{x - 1} \geq 0$ . Тогда  $x = t^2 + 1$  и уравнение принимает вид

$$\sqrt{t^2 + t + 1} + \sqrt{t^2 - 2t + 1} = 2.$$

Заметив, что под вторым знаком радикала стоит  $(t - 1)^2$ , получаем

$$\sqrt{t^2 + t + 1} = 2 - |t - 1|$$

При  $0 \leq t < 1$  имеем

$$\sqrt{t^2 + t + 1} = 1 + t,$$

откуда  $t = 0$ , а  $x_1 = 1$ .

При  $t \geq 1$  приходим к уравнению

$$\sqrt{t^2 + t + 1} = 3 - t,$$

единственный корень которого  $t = 8/7$  удовлетворяет условию  $t \geq 1$ . Итак,

$$x_2 = 1 + 64/49 = 113/49.$$

**Ответ:** 1;  $113/49$ .

Рассмотрим теперь уравнение с параметром.

**Пример 8.** Решите уравнение

$$\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-2} = a.$$

**Решение.** В ОДЗ исходного уравнения, т.е. при  $x \geq 2$ ,  $(2x-1) - (x-2) = x+1 > 0$ , т.е. левая часть исходного уравнения положительна, поэтому  $a \geq 0$ . Пусть  $t = \sqrt{x-2} \geq 0$ . Тогда  $x = t^2 + 2$ , и уравнение приводится к виду

$$\sqrt{2t^2 + 3} = a + t.$$

Возведем в квадрат и упростим:

$$t^2 - 2at + 3 - a^2 = 0. \quad (4)$$

Условие разрешимости этого уравнения дает

$$\frac{D}{4} = 2a^2 - 3 \geq 0,$$

т.е. (учитывая, что  $a > 0$ )  $a \geq \sqrt{3/2}$ , при этом  $t_{1,2} = a \pm \sqrt{2a^2 - 3}$ .

При  $a = \sqrt{3/2}$  уравнение (4) имеет один корень  $t = \sqrt{3/2}$ , а  $x = 3/2 + 2 = 7/2$ .

Если  $\sqrt{3/2} < a \leq \sqrt{3}$ , свободный член уравнения (4) неотрицателен, и, следовательно, оба его корня неотрицательны (ведь  $t_1 + t_2 = 2000$ ). Для них

$$x_{1,2} = t_{1,2}^2 + 2 = 3a^2 - 1 \pm 2a\sqrt{2a^2 - 3}.$$

Если же  $a > \sqrt{3}$ , годится только неотрицательный корень (с плюсом), т.е. тогда

$$x = 3a^2 - 1 + 2a\sqrt{2a^2 - 3}.$$

**Ответ:** корней нет при  $a < \sqrt{3}/2$ ;  $x = 7/2$  при  $a = \sqrt{3}/2$ ;  
 $x_{1,2} = 3a^2 - 1 \pm 2a\sqrt{2a^2 - 3}$  при  $\sqrt{3}/2 < a \leq \sqrt{3}$ ;  $x = 3a^2 -$   
 $-1 + 2a\sqrt{2a^2 - 3}$  при  $a > \sqrt{3}$ .

### Упражнения

#### 2. Решите уравнения

а)  $\sqrt{8x+1} - \sqrt{x-2} = 4$ ;

б)  $\sqrt{3x+2} - \sqrt{x-1} = 2$ ;

в)  $2x + \sqrt{2x^2 - 4x + 12} = 4x + 8$ ;

г)  $\sqrt{\frac{20+x}{x}} - \sqrt{\frac{20-x}{x}} = \sqrt{6}$ ;

д)  $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-4} = 2\sqrt{x}$ ;

е)  $\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+x+5} = \sqrt{2x^2+2x+17}$ ;

ж)  $\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} = 1-2x^2$ ;

з)  $\sqrt{9-\frac{9}{x}} = x - \sqrt{x-\frac{9}{x}}$ .

#### 3. Решите уравнения с параметром

а)  $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-a} = 2$ ;

б)  $\sqrt{2x+a} - \sqrt{x-1} = a$ ;

в)  $\sqrt{2x+a} - \sqrt{x-a} = 2$ ;

г)  $\sqrt{2x+a} - \sqrt{x-a} = 2a$ .

### Умножим на сопряженное

В основе рассматриваемого способа решения лежит формула

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b.$$

Иногда использование этой формулы облегчает решение. Выражения  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$  и  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  мы будем называть сопряженными.

#### Пример 9. Решите уравнение

$$\sqrt{5x+1} - \sqrt{x+3} = 2x-1.$$

**Решение.** Домножим левую и правую части уравнения на сумму радикалов, стоящих в левой части. Получается урав-

$$2(2x - 1) = (2x - 1)(\sqrt{5x + 1} + \sqrt{x + 3}),$$

равносильное такому:

$$(2x - 1)\left(2 - (\sqrt{5x + 1} + \sqrt{x + 3})\right) = 0,$$

откуда либо  $x = 1/2$ , либо

$$\sqrt{5x + 1} + \sqrt{x + 3} = 2.$$

Последнее уравнение решим уже рассмотренным способом: пусть  $t = \sqrt{x + 3} \geq 0$ . Тогда приходим к уравнению

$$\sqrt{5t^2 - 14} = 2 - t,$$

откуда  $t = \frac{-1 + \sqrt{19}}{2}$ , а  $x = \frac{4 - \sqrt{19}}{2}$ .

**Ответ:**  $\frac{1}{2}; \frac{4 - \sqrt{19}}{2}$ .

Заметим, что умножение на сумму радикалов в данном случае не приводит к появлению посторонних корней — ведь область определения этой суммы та же, что у исходного уравнения, и она положительна как сумма неотрицательных слагаемых, не обращающихся, очевидно, в ноль одновременно.

Отметим также, что решить уравнение из примера 9 «в лоб» довольно трудно — оно путем громоздких вычислений сводится к уравнению четвертой степени.

Посмотрите, насколько эффективно работает этот метод в двух следующих примерах, которые оказались по силам очень небольшому проценту поступающих.

**Пример 10** (геологический факультет МГУ, 1985). *Решите уравнение*

$$\sqrt{3x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{3x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 4}.$$

**Решение.** Пусть  $A = 3x^2 - 1$ ,  $B = 3x^2 + 2x + 1$ ,  $C = x^2 - x + 1$ ,  $D = x^2 + 2x + 4$ .

Перепишем наше уравнение:

$$\sqrt{C} - \sqrt{D} = \sqrt{B} - \sqrt{A},$$

откуда (так как  $\sqrt{m} - \sqrt{n} = \frac{m - n}{\sqrt{m} + \sqrt{n}}$ ) получаем

$$\frac{C - D}{\sqrt{C} + \sqrt{D}} = \frac{B - A}{\sqrt{B} + \sqrt{A}}.$$

Поскольку  $C - D = -3(x + 1)$ , а  $B - A = 2(x + 1)$ , приходим к равенству

$$\frac{-3(x+1)}{\sqrt{C} + \sqrt{D}} = \frac{2(x+1)}{\sqrt{B} + \sqrt{A}} \Leftrightarrow (x+1) \left( \frac{2}{\sqrt{B} + \sqrt{A}} + \frac{3}{\sqrt{C} + \sqrt{D}} \right) = 0,$$

а поскольку второй сомножитель, очевидно, положителен, имеем  $x = -1$ . Проверкой убеждаемся, что  $x = -1$  — корень данного уравнения.

**Ответ:**  $-1$ .

**Пример 11** (геологический факультет МГУ, 1985). *Решите уравнение*

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}.$$

**Указание.** Область определения уравнения  $x \geq -1/2$ , при таких  $x$  мы можем применить формулу  $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ . Поэтому можно переписать уравнение так:

$$(\sqrt{2x-1} - 3)(\sqrt{x+6} + \sqrt{x+2}) = 4.$$

Домножив левую и правую части на разность  $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+2}$ , получим

$$\sqrt{2x-1} - 3 = \sqrt{x+6} - \sqrt{x+2}.$$

Осталось возвести в квадрат, а затем найти и проверить корни.

**Ответ:** 7.

**Упражнение 4.** Решите уравнения

а)  $\sqrt{5x+7} - \sqrt{x+4} = 4x+3$ ;

б)  $\sqrt{x^2+3x-2} - \sqrt{x^2-x+1} = 4x-3$ ;

в)  $\sqrt{45x+12} - \sqrt{15x+2} = \sqrt{10}(3x+1)$ ;

г)  $\sqrt{(x+4)(2x+3)} - 3\sqrt{x+8} = 4 - \sqrt{(x+8)(2x+3)} + 3\sqrt{x+4}$ ;

д)  $\sqrt{3x^2-1} + \sqrt{x^2+2} = \sqrt{3x^2+2x-3} + \sqrt{x^2+3x-1}$ ;

е)  $\sqrt{x^2-9x+24} - \sqrt{6x^2-59x+149} = |5-x|$ .

В школьном курсе математики вы изучали свойства многих элементарных функций. Их иногда можно с успехом применять и при решении уравнений. Ограничимся несколькими примерами.

## Монотонность функций

Начнем с примера.

**Пример 12.** Решите уравнение

$$\sqrt{7x+9} + \sqrt{15x+1} = 9 - \sqrt{2x-1}.$$

**Решение.** Это уравнение можно попытаться решить возведением в квадрат (трижды!). Однако при этом, во-первых, получится уравнение четвертой степени и, во-вторых, его коэффициенты будут ужасны. Попробуем угадать корень. Это сделать нетрудно. Это  $x = 1$ . Теперь заметим, что левая часть уравнения — возрастающая функция, а правая — убывающая. Но это значит, что больше одного корня такое уравнение иметь не может. Итак,  $x = 1$  — единственный корень.

**Ответ:** 1.

Вообще в случае (это относится не только к иррациональным уравнениям), если уравнение имеет вид

$$f(x) = 0,$$

где  $f(x)$  возрастает (убывает), или

$$f(x) = g(x),$$

где функции  $f(x)$  и  $g(x)$  «встречно монотонны», т.е.  $f(x)$  возрастает, а  $g(x)$ , убывает, то такое уравнение имеет не более одного корня. Если вам удалось заметить это или привести уравнение к такому виду, и если вы сможете угадать корень, то он и будет решением данного уравнения.

И еще один любопытный пример.

**Пример 13.** Решите уравнение

$$\sqrt{1 + \sqrt{1+x}} = x.$$

Здесь после освобождения от радикалов получится полное уравнение 4-й степени, так что поищем какой-нибудь другой путь решения.

**Решение.** Пусть  $f(x) = \sqrt{1+x}$ . Наше уравнение имеет вид

$$f(f(x)) = x. \quad (5)$$

Заметим, что функция  $f(x)$  возрастающая, и докажем, что уравнение (5) равносильно уравнению

$$f(x) = x. \quad (6)$$

Для этого заметим, что всякий корень уравнения (6) есть корень уравнения (5). Пусть  $x_0$  — корень уравнения (5), причем

$f(x_0) \neq x_0$ . Тогда либо  $f(x_0) > x_0$ , но при этом  $f(f(x_0)) = x_0 > f(x_0)$ , противоречие; либо  $f(x_0) < x_0$ , но в этом случае  $x_0 = f(f(x_0)) < f(x_0)$ , т.е.  $x_0 < f(x_0)$ , что также невозможно. Утверждение доказано. Чтобы завершить решение, достаточно решить уравнение  $x = \sqrt{1+x}$ .

**Ответ:**  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

**Упражнение 5.** Решите уравнения

а)  $\sqrt{15x+4} + \sqrt{x+1} = 9$ ;

б)  $x(\sqrt{x^2+3x+5} + \sqrt{x}) = 5 - x^2$ ;

в)  $\sqrt{x^2+2x+6} + \sqrt{x+3} = 6 - x$ ;

г)  $x^2 - 3\sqrt{3x+1} = 1$ .

**Область определения**

На следующем примере мы рассмотрим еще один класс задач.

**Пример 14.** Решите уравнение

$$\sqrt{4-x^2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x+7} - \sqrt{4x+1}.$$

**Решение.** В области определения данного уравнения должны одновременно выполняться неравенства  $4-x^2 \geq 0$  и  $x \geq 2$ , что возможно только при  $x = 2$ . Проверкой убеждаемся, что это — корень.

**Ответ:** 2.

**Упражнение 6.** Решите уравнения

а)  $\sqrt{x^2-3x+2} + 2\sqrt{4-x^2} + 1 = \sqrt{x-1}$ ;

б)  $\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{x}} + \sqrt{x^2-x-2} + \sqrt{3x^2+4} = 4$ .

**Ограниченность функций**

Здесь мы тоже разберем достаточно характерные примеры.

**Пример 15.** Решите уравнение

$$\sqrt{3-x} + \sqrt{x+5} - x^2 = 5 + 2x.$$

**Решение.** Перепишем уравнение:

$$\sqrt{3-x} + \sqrt{x+5} = x^2 + 2x + 5.$$



Пусть  $t = \sqrt{3-x} + \sqrt{x+5}$ . Тогда

$$t^2 = 8 + 2\sqrt{15-2x-x^2}.$$

Наибольшее значение подкоренного выражения достигается при  $x = -1$  (в вершине параболы  $y = 15 - 2x - x^2$ ). При этом  $t^2 = 16$ . Отсюда следует, что  $t \leq 4$ . Наименьшее значение правой части исходного уравнения достигается также при  $x = -1$  и тоже равно 4. При  $x \neq -1$  (когда она существует) левая часть меньше правой.

**Ответ:**  $-1$ .

И наконец, еще один пример, в решении которого мы воспользуемся свойством суммы двух взаимно обратных положительных чисел:  $a + \frac{1}{a} \geq 2$ , причем равенство достигается лишь при  $a = 1$ .

**Пример 16.** Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{2x-1}{x^2-x+1}} + \sqrt{\frac{x^2-x+1}{2x-1}} = \sqrt{4x-x^2}.$$

**Решение.** Пусть  $t = \sqrt{\frac{2x-1}{x^2-x+1}} > 0$ . Левая часть уравнения, равная  $t + \frac{1}{t}$ , больше или равна 2:

$$t + \frac{1}{t} \geq 2,$$

а правая часть не больше 2:

$$\sqrt{4x-x^2} = \sqrt{4-(x-2)^2} \leq 2.$$

Поэтому равенство возможно только при  $x = 2$ . Проверкой убеждаемся, что  $x = 2$  — корень.

**Ответ:** 2.

**Упражнение 7.** Решите уравнения

а)  $\sqrt{3x^2+6x+7} + \sqrt{5x^2+10x+14} = 4-2x-x^2$ ;

б)  $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = x^2-4x+6$ .

## ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

*А.Егоров, Ж.Раббот*

Выше помещена статья о решении иррациональных уравнений. В данной статье те же идеи применяются для решения неравенств, содержащих квадратные радикалы; при этом появляются дополнительные трудности.

Дело в том, что нам придется, как и в случае иррациональных уравнений, избавляться от радикалов с помощью почленного возведения неравенства в квадрат. Но если при решении уравнений мы могли в результате этой операции получить посторонние корни, которые, как правило, легко проверить, и не могли потерять корни, то корни неравенства при бездумном возведении в квадрат могут одновременно и теряться, и приобретаться.

Например, возведя в квадрат верное неравенство  $-1 < 2$ , мы получим верное неравенство  $1 < 4$ ; из верного неравенства  $-5 < 2$  получается уже неверное неравенство  $25 < 4$ ; из неверного неравенства  $1 < -2$  получим верное неравенство  $1 < 4$ ; наконец, из неверного неравенства  $5 < 2$  получается неверное неравенство  $25 < 4$ ; вы видите, что возможны все комбинации верных и неверных неравенств!

Однако верно основное используемое здесь утверждение: *если обе части неравенства неотрицательны, то оно равносильно неравенству, полученному из него почленным возведением в квадрат.*

Поскольку, в отличие от уравнений, где часто была возможна проверка найденных «кандидатов в ответ», при решении неравенств, как правило, бесконечно много решений и проверить их все принципиально невозможно, решая неравенства, надо тщательно следить за равносильностью всех переходов.

### Простейшие неравенства

Так мы называем неравенства следующих трех типов:

1)  $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ ; 2)  $\sqrt{f(x)} > g(x)$ ; 3)  $\sqrt{f(x)} < g(x)$ .

Нестрогие неравенства, аналогичные выписанным выше (со

знаками  $\leq$  и  $\geq$ ), мы будем относить к соответствующему типу – так, оба неравенства

$$\sqrt{5x+8} > \sqrt{4x^2-1} \text{ и } \sqrt{5x+8} \geq \sqrt{4x^2-1}$$

относятся к первому типу и т.п.

Поскольку обе части неравенства 1) неотрицательны, оно, очевидно, равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

(понятно, что неравенство  $f(x) \geq 0$  выполняется при этом автоматически).

Рассуждая аналогично для остальных случаев, получим:

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \quad (1)$$

$$\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \quad (1')$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x); \\ g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \quad (2)$$

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g^2(x); \\ g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \quad (2')$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq f(x) < g^2(x), \\ g(x) > 0; \end{cases} \quad (3)$$

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq f(x) \leq g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \quad (3')$$

Мы видим, что самый громоздкий – второй случай. Это происходит из-за того, что здесь возможны оба варианта – когда правая часть,  $g(x)$ , неотрицательна и когда она меньше нуля. В

первом варианте обе части исходного неравенства неотрицательны, поэтому его можно почленно возвести в квадрат, а во втором возводить в квадрат нельзя (правая часть меньше нуля), но в этом нет никакой необходимости — ведь тогда неотрицательная левая часть автоматически больше отрицательной правой.

Выписанные схемы (1) – (3') – наш основной инструмент при окончании решения иррационального неравенства, к ним сводится решение практически любой такой задачи. Разберем несколько примеров.

**Пример 1.** Решите неравенство

$$\sqrt{2x+1} > \sqrt{2-3x}.$$

**Решение.** Согласно схеме (1), данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x+1 > 2-3x, \\ 2-3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{5}, \\ x \leq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{5} < x \leq \frac{2}{3}.$$

**Ответ:**  $\frac{1}{5} < x \leq \frac{2}{3}$ .

**Пример 2.** Решите неравенство

$$\sqrt{2x+1} \geq \sqrt{1-x^2-x}.$$

**Решение.** Действуя по схеме (1'), приходим к системе

$$\begin{cases} 2x+1 \geq 1-x^2-x, \\ 1-x^2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x \geq 0, (a) \\ x^2+x-1 \leq 0. (b) \end{cases}$$

Из неравенства (a):

$$x \leq -3; x \geq 0.$$

Из неравенства (b):

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

после чего без труда получаем ответ.

**Ответ:**  $0 \leq x \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

**Пример 3.** Решите неравенство  $\sqrt{x+2} > x$ .

**Решение.** Действуем по схеме (2). Если  $x < 0$ , данное неравенство выполняется при всех допустимых значениях неиз-

вестного, т.е. при

$$x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2.$$

Таким образом, все  $-2 \leq x < 0$  – решения данного неравенства (это мы решили вторую систему из совокупности схемы (2)).

Если же  $x \geq 0$ , данное неравенство равносильно неравенству

$$x + 2 > x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2.$$

Таким образом, все  $0 \leq x < 2$  – также решения данного неравенства (это решения первой системы совокупности схемы (2)).

Объединяя полученные решения, найденные в обоих случаях, приходим к ответу.

**Ответ:**  $-2 \leq x < 2$ .

**Пример 4.** Решите неравенство  $\sqrt{x^2 - 3x + 1} > x + 1$ .

**Решение.** Снова действуем по схеме (2). Если правая часть отрицательна, т.е.  $x < -1$ , подкоренное выражение положительно (как, очевидно, при всех отрицательных значениях переменной – ведь тогда оно состоит из трех положительных слагаемых), и данное неравенство выполняется. Таким образом, все  $x < -1$  – решения данного неравенства. Пусть теперь  $x \geq -1$ . Тогда можно возвести данное неравенство в квадрат и получится равносильное данному неравенство  $x < 0$ . Таким образом, все  $-1 \leq x < 0$  – также решения данного неравенства.

**Ответ:**  $x < 0$ .

**Пример 5.** Решите неравенство

$$\sqrt{x+1} \geq x+5.$$

**Решение.** Применим схему (2'). Заметим, что при всех допустимых значениях  $x$ , т.е. при  $x \geq -1$ , правая часть данного неравенства положительна, так что вторая система схемы (2') не имеет решений. Итак, в ОДЗ обе части данного неравенства неотрицательны, поэтому оно равносильно неравенству  $x+1 \geq x^2 + 10x + 25$ , не имеющему решений.

**Ответ:** нет решений.

**Замечание.** Другое решение этой задачи можно получить, сделав замену  $t = \sqrt{x+1}$ , т.е.  $x = t^2 - 1$ , где  $t \geq 0$ . Тогда данное неравенство приведет к квадратному неравенству  $t \geq t^2 + 4$ , не имеющему не только неотрицательных, а вообще никаких решений.

**Пример 6.** Решите неравенство

$$\sqrt{2x+1} \geq 2x^2 - x - 1.$$

**Решение.** Снова работает схема (2'). Разложим предварительно на множители правую часть. Неравенство примет вид

$$\sqrt{2x+1} \geq (2x+1)(x-1). \quad (a)$$

Воспользуемся наличием в правой части неравенства (a) множителя, равного подкоренному выражению. Подкоренное выражение (и одновременно первый сомножитель правой части) неотрицательно, если  $x \geq -0,5$ ; это и есть ОДЗ. Поэтому если  $-0,5 \leq x < 1$ , неравенство (a) выполняется – неотрицательная левая часть больше отрицательной правой. Если же  $x \geq 1$ , после возведения обеих частей неравенства (a) в квадрат мы приходим к равносильному неравенству (a) соотношению  $2x+1 \geq (2x+1)^2(x-1)^2$ , которое при рассматриваемых ограничениях  $x \geq 1$  равносильно неравенству

$$1 \geq (2x+1)(x^2-2x+1) \Leftrightarrow 2x^3-3x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2(2x-3) \leq 0.$$

Так как при  $x \geq 1$  первый сомножитель левой части последнего неравенства положителен, получаем  $2x-3 \leq 0$ . Итак, второй случай дает решения  $1 \leq x \leq 1,5$ .

**Ответ:**  $-0,5 \leq x \leq 1,5$ .

**Пример 7.** Решите неравенство

$$\sqrt{5x-4} < x.$$

**Решение.** Воспользуемся схемой (3). Согласно ей, наша задача сводится к решению двойного неравенства  $0 \leq 5x-4 < x^2$  при условии  $x > 0$ . Таким образом, надо решить систему

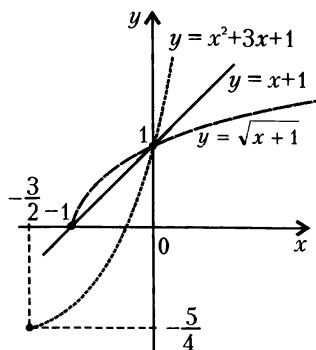
$$\begin{cases} x > 0, \\ 5x-4 \geq 0, \\ x^2-5x+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \geq \frac{4}{5}, \\ x < 1; x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[ \frac{4}{5}; 1 \right) \cup (4; +\infty).$$

**Ответ:**  $0,8 \leq x < 1; x > 4$ .

**Пример 8.** Решите неравенство  $\sqrt{x+1} \leq x^2+3x+1$ .

Прямое применение схемы (3') приводит (после возведение данного неравенства в квадрат) к необходимости найти корни многочлена четвертой степени, причем легко подобрать лишь один его корень,  $x = 0$  (он получится из-за взаимного уничтожения свободных членов, равных 1, в обеих частях полученного неравенства), а корни оставшегося кубического многочлена найти очень непросто – они не рациональны.

**Решение.** Заметим, что график левой части данного неравенства (см. рисунок) – верхняя ветвь параболы (ось симметрии этой параболы – ось абсцисс, а вершина – точка  $(-1; 0)$ ); график



правой части — парабола, ось которой параллельна оси ординат, а вершина — точка  $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{5}{4}\right)$ .

Воспользуемся теперь тем, что график левой части имеет «выпуклость вверх» (т.е. лежит выше любой своей хорды — отрезка, соединяющего любые две точки графика), а правая часть — «выпуклость вниз».

Мы уже установили, что графики левой и правой частей имеют общую точку с абсциссой, равной нулю. Поэтому становится очевидным, что луч с началом в точке  $(-1; 0)$ , проходящий через точку  $(0; 1)$ , разделяет два случая: левее общей точки график левой части выше графика правой, а правее — наоборот (это хорошо видно на рисунке).

В задаче требуется найти, при каких значениях переменной график левой части ниже графика правой. Это легко находится из рисунка.

**Ответ:**  $[0; +\infty)$ .

**Упражнения.** Решите неравенства

- $x < \sqrt{2-x}$ .
- $x+1 > \sqrt{2+x}$ .
- $x + \frac{9}{8} > \sqrt{x+1}$ .
- $2x-3 < 2\sqrt{x^2-9}$ .
- $\sqrt{x^2+3} \geq \sqrt{3-x-2x^2}$ .
- $\sqrt{x^4-2x^2+1} > 1-x$ .
- $\sqrt{4-4x^3+x^6} > x-\sqrt[3]{2}$ .
- $\frac{1}{\sqrt{1+x}} > \frac{1}{2-x}$ .
- $\sqrt{-x^2-4x+x+1} > 0$ .
- $\sqrt{-x^2+x+2}+2x-1 > 0$ .

## Более сложные неравенства

В этом разделе мы начнем решать более сложные задачи, стараясь свести их решение к стандартным ситуациям — к простейшим неравенствам, рассмотренным выше. Приемы сведения во многом аналогичны применяемым при решении иррациональных уравнений.

Если в неравенстве встречаются два квадратных радикала, обычно приходится возводить неравенство в квадрат дважды, конечно, обеспечивая при этом необходимые для проведения этой операции условия.

**Пример 9.** Решите неравенство

$$\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} > 2.$$

**Первое решение.** Перенесем второй радикал в правую часть, чтобы обе части неравенства стали неотрицательными и его можно было возвести в квадрат (не рассматривая при этом два случая):

$$\begin{aligned}\sqrt{2x+3} &> \sqrt{x-2} + 2 \Leftrightarrow 2x+3 > \\ &> x-2 + 4\sqrt{x-2} + 4 \Leftrightarrow x+1 > 4\sqrt{x-2}. \quad (a)\end{aligned}$$

Мы пришли к простейшему стандартному неравенству (см. схему (3) в первом разделе статьи):

$$\begin{aligned}(a) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 16(x-2) < x^2 + 2x + 1, \\ x+1 > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - 14x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x < 3; x > 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x < 3 \\ x > 11. \end{cases}\end{aligned}$$

**Замечание.** При получении неравенства (a) мы не выписывали допустимые значения неизвестного, но в этом не было необходимости, так как там фигурировал  $\sqrt{x-2}$ , который существует при  $x \geq 2$ , но при этих значениях  $x$  существует и  $\sqrt{2x+3}$ .

**Второе решение.** Сделаем замену переменной  $t = \sqrt{x-2} \geq 0$ . Тогда  $x = t^2 + 2$  и данное неравенство приводится к стандартному виду:  $\sqrt{2t^2+7} > t+2$ . Решив это неравенство по схеме (2), получим  $0 \leq t < 1$ ,  $t > 3$ . Остается сделать обратную замену и найти  $x$ .

**Ответ:**  $x \in [2; 3) \cup (11; +\infty)$ .



**Пример 10.** Решите неравенство  $\frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x + 6} < 1$ .

**Решение.** Заметим, что для избавления от радикала достаточно возвести данное неравенство в квадрат. Но для этого необходима неотрицательность обеих его частей, что выполняется лишь при выполнении условия  $x + 6 > 0$  (ведь все остальные выражения, входящие в неравенство, неотрицательны). Но при этом условии можно умножить данное неравенство на положительное выражение  $x + 6$ .

Итак, если  $x > -6$ , данное неравенство преобразуется и решается так:

$$\begin{aligned} \begin{cases} -6 < x \leq -5; x \geq 5, \\ \sqrt{x^2 - 25} < x + 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -6 < x \leq -5; x \geq 5, \\ x^2 - 25 < x^2 + 12x + 36 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -6 < x \leq -5; x \geq 5, \\ x > -\frac{61}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{61}{12} < x \leq -5 \\ x \geq 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Если же  $x < -6$ , данное неравенство выполняется, так как его отрицательная левая часть меньше положительной правой.

**Ответ:**  $x \in (-\infty; -6) \cup \left(-\frac{61}{12}; -5\right] \cup [5; +\infty)$ .

Решим еще одну задачу. Хотя новые идеи здесь не встречаются, важно не упустить многочисленные детали (ОДЗ, схемы и т.п.)

**Пример 11.** Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} < 1 + \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

**Решение.** Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 + 3x + 2 \geq 0, \\ x^2 - x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq -1. \end{cases}$$

Поскольку обе части данного неравенства неотрицательны, после возведения его в квадрат получим неравенство, равносильное ему в ОДЗ:

$$x^2 + 3x + 2 < 1 + 2\sqrt{x^2 - x + 1} + x^2 - x + 1 \Leftrightarrow 2x < \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

Для последнего неравенства в ОДЗ работает схема (2):

$$2x < \sqrt{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ 4x^2 < x^2 - x + 1 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ 3x^2 + x - 1 < 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < \frac{-1 + \sqrt{13}}{6} \\ x < 0. \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{\sqrt{13} - 1}{6}.$$

Осталось учесть ОДЗ и получить ответ.

**Ответ:**  $x \leq -2; -1 \leq x < \frac{\sqrt{13} - 1}{6}.$

И в заключение этого раздела решим три более трудные задачи. Они предлагались на вступительных экзаменах в МГУ в 1975 году: первая – на отделении политической экономии экономического факультета, вторая – на геологическом факультете, третья – на отделении экономической кибернетики экономического факультета. Из приведенных решений можно увидеть, как важно владеть хорошей техникой вычислений и преобразований, а также находить удачную замену переменной.

**Пример 12.** Решите неравенство

$$\sqrt{x - \frac{1}{2}} + \frac{x+1}{4} < \sqrt{2x - 1 + \frac{(x+1)^2}{8}}.$$

**Решение.** Заметим сначала, что ОДЗ есть луч  $x \geq 0,5$ . Затем, поскольку подкоренное выражение в правой части данного неравенства можно записать как  $2\left(\left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{x+1}{4}\right)^2\right)$ , удобно сделать замену переменной, причем ввести сразу две новые переменные:

$$\begin{cases} \sqrt{x - \frac{1}{2}} = u \geq 0, \\ \frac{x+1}{4} = v. \end{cases}$$

Отметим, что в ОДЗ вторая новая переменная,  $v$ , положительна. Данное неравенство после замены примет вид

$$u + v < \sqrt{2(u^2 + v^2)} \Leftrightarrow u^2 + 2uv + v^2 < 2(u^2 + v^2) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (u - v)^2 > 0 \Leftrightarrow u \neq v.$$

Вернемся к старым переменным:  $\sqrt{x - \frac{1}{2}} \neq \frac{x+1}{4}$ . Решая полученное неравенство, находим  $x \neq 7 \pm 20$ .

**Ответ:**

$$x \in \left[ \frac{1}{2}; 7 - 2\sqrt{10} \right) \cup (7 - 2\sqrt{10}; 7 + 2\sqrt{10}) \cup (7 + 2\sqrt{10}; +\infty).$$

**Пример 13.** Решите неравенство

$$\sqrt{(x-3)(-x+5)} > -\sqrt{x-3} - 1 + \sqrt{-x+5}.$$

**Решение.** Преобразовав данное неравенство к виду

$$\sqrt{(x-3)(-x+5)} + 1 > \sqrt{-x+5} - \sqrt{x-3}, \quad (a)$$

мы добьемся, во-первых, того, что левая часть неравенства стала положительной, а во-вторых, если возвести последнее неравенство почленно в квадрат, то, поскольку в сумме подкоренных выражений правой части неизвестное уничтожится, получится неравенство, квадратное относительно  $\sqrt{(x-3)(-x+5)}$ , — это и есть основная идея нашего решения. Теперь надо ее аккуратно осуществить.

Если правая часть неравенства (a) отрицательна, все допустимые значения неизвестного будут его решениями: положительная левая его часть будет больше отрицательной правой:

$$\begin{cases} 3 \leq x \leq 5, \\ \sqrt{-x+5} < \sqrt{x-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 5, \\ -x+5 < x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 5, \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < x \leq 5.$$

Если же правая часть неравенства (a) неотрицательна, его можно в ОДЗ возвести почленно в квадрат и получить остальные решения:

$$\begin{cases} 3 \leq x \leq 5, \\ \sqrt{-x+5} \geq \sqrt{x-3}, \\ (x-3)(-x+5) + 2\sqrt{(x-3)(-x+5)} + 1 > \Leftrightarrow \\ > (-x+5) - 2\sqrt{(x-3)(-x+5)} + (x-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 4, \\ (x-3)(-x+5) + 4\sqrt{(x-3)(-x+5)} - 1 > 0. \end{cases} \quad (b)$$

Решим отдельно второе неравенство системы (b), введя, как

уже было сказано во втором абзаце решения, обозначение  $\sqrt{(x-3)(-x+5)} = t \geq 0$ :

$$\begin{cases} t \geq 0, \\ t^2 + 4t - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0, \\ t < -2 - \sqrt{5}; t > -2 + \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow t > \sqrt{5} - 2.$$

Вернемся к старой переменной:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-3)(-x+5)} > \sqrt{5} - 2 &\Leftrightarrow x^2 - 8x + 24 - 4\sqrt{5} < 0 \\ &\Leftrightarrow 4 - 2\sqrt{\sqrt{5} - 2} < x < 4 + 2\sqrt{\sqrt{5} - 2}. \end{aligned}$$

Отметим, что первый равносильный переход в последней цепочке преобразований – то, что остается от (довольно громоздкой!) схемы (2), если в ней  $g(x)$  – просто положительное число.

Для того чтобы решить систему (b) и получить ответ, надо заметить, что решения ее второго неравенства – интервал с центром в точке 4 радиуса  $r = 2\sqrt{\sqrt{5} - 2}$ , поэтому осталось только сравнить числа 3 и  $(4 - r)$ . Делаем это привычным образом: подставляем  $x = 3$  в квадратный трехчлен, фигурировавший в последнем решенном нами неравенстве:

$$3^2 - 8 \cdot 3 + 24 - 4\sqrt{5} = 9 - 4\sqrt{5} = \sqrt{81} - \sqrt{80} > 0.$$

Итак, число 3 расположено вне интервала корней квадратного трехчлена, поэтому оно меньше меньшего корня трехчлена и мы можем, завершить решение системы (b):  $4 - 2\sqrt{\sqrt{5} - 2} < x \leq 4$ .

Учитывая найденные ранее другие решения данного неравенства, получаем ответ.

**Ответ:**  $4 - 2\sqrt{\sqrt{5} - 2} < x \leq 5$ .

**Пример 14.** Решите неравенство  $\sqrt{9 - \frac{9}{x}} < x - \sqrt{x - \frac{9}{x}}$ .

**Решение.** ОДЗ данного неравенства:

$$-3 \leq x < 0; x \geq 3.$$

Заметим, во-первых, что при  $x < 0$  данное неравенство не имеет решений: его неотрицательная левая часть не может быть меньше отрицательной правой. Поэтому осталось решить данное неравенство при  $x \geq 3$ .

Во-вторых, при  $x \geq 3$  правая часть данного неравенства положительна: от числа, большего или равного 3, отнимается число, меньшее  $\sqrt{3}$ . Поэтому обе части данного неравенства в

этом случае неотрицательны и его можно возвести в квадрат:

$$\begin{aligned} 9 - \frac{9}{x} < x^2 - 2x\sqrt{x - \frac{9}{x}} + x - \frac{9}{x} &\Leftrightarrow 0 < (x^2 - 9) - 2x\sqrt{\frac{x^2 - 9}{x}} + x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 9) - 2\sqrt{(x^2 - 9)x} + x > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 - 9} - \sqrt{x})^2 > 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство при наших ограничениях равносильно системе

$$\begin{cases} x \geq 3, \\ \sqrt{x^2 - 9} \neq \sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ x \neq \frac{1 + \sqrt{37}}{2}. \end{cases}$$

Это и есть ответ.

**Ответ:**  $x \in \left[ 3; \frac{1 + \sqrt{37}}{2} \right) \cup \left( \frac{1 + \sqrt{37}}{2}; +\infty \right).$

**Упражнения.** Решите неравенства

11.  $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2-x} > 1.$

12.  $\sqrt{2-x} - \sqrt{x} < 1.$

13.  $\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}} < \frac{1}{x} - \frac{1}{2}.$

14.  $\frac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x} < 1.$

15.  $\sqrt{2-\sqrt{3+x}} < \sqrt{4+x}.$

16.  $\sqrt{3x^2+5x+7} - \sqrt{3x^2+5x+2} > 1.$

17.  $\sqrt{25-x^2} + \sqrt{x^2+x} > 3.$

18.  $\sqrt{x-1} + x - 3 \geq \sqrt{2(x-3)^2 + 2x - 2}.$

19.  $\sqrt{x+7} - 1 < \sqrt{-x-5} + \sqrt{(x+7)(-x-5)}.$

20.  $\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} > \frac{x-1}{x}.$

**Домножим на сопряженное**

Напомним, что выражения  $\alpha\sqrt{a} - \beta\sqrt{b}$  и  $\alpha\sqrt{a} + \beta\sqrt{b}$  называют сопряженными друг другу. Нам понадобится хорошо известное свойство этих выражений: их произведение  $\alpha^2 a - \beta^2 b$  уже не содержит корней из  $a$  и  $b$ . Поэтому в ряде задач вместо возведения в квадрат, приводящего к слишком громоздким выражениям, разумнее умножить обе части неравенства на выражение, сопряженное одной из них.

**Пример 15.** Решите неравенство  $\sqrt{5x+1} - \sqrt{x+3} < 2x-1$ .

**Решение.** Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} 5x+1 \geq 0, \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{5}.$$

Домножим обе части данного неравенства на выражение, сопряженное его левой части и, очевидно, положительное в ОДЗ:

$$\begin{aligned} (5x+1) - (x+3) &< (2x-1)(\sqrt{5x+1} + \sqrt{x+3}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2(2x-1) < (2x-1)(\sqrt{5x+1} + \sqrt{x+3}). \end{aligned}$$

Дальнейшее решение зависит, очевидно, от знака общего множителя левой и правой частей полученного неравенства  $(2x-1)$ .

Если он меньше нуля, т.е.  $-\frac{1}{5} \leq x < \frac{1}{2}$ , сократив на этот отрицательный множитель, приходим к неравенству  $\sqrt{5x+1} + \sqrt{x+3} < 2$ , из которого находим (например, с помощью подстановки  $\sqrt{x+3} = t \geq 0$  или прямым возведением в квадрат — ведь обе части этого неравенства положительны)  $-\frac{1}{5} \leq x < \frac{4-\sqrt{19}}{2}$  (обязательно проделайте все выкладки и убедитесь в правильности этого ответа).

Во втором случае, если общий множитель положителен (т.е. при  $x > \frac{1}{2}$ ), после сокращения на него получаем неравенство  $\sqrt{5x+1} + \sqrt{x+3} > 2$ , справедливое при всех этих значениях  $x$ : ведь тогда верны оценки

$$\sqrt{5x+1} + \sqrt{x+3} > \sqrt{\frac{5}{2}+1} + \sqrt{\frac{1}{2}+3} = \sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}} > 1+1=2.$$

Осталось указать, что в третьем возможном случае — если общий множитель равен нулю, — неравенство не выполняется: мы получаем тогда  $0 > 0$ , что неверно.

**Ответ:**  $x \in \left[-\frac{1}{5}; \frac{4-\sqrt{19}}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$

**Замечание.** Конечно, примененный способ привел к успеху из-за того, что разность подкоренных выражений оказалась кратной правой части данного неравенства. Это обстоятельство можно считать признаком, по которому можно оценивать целесообразность применения такого приема.

Вы, возможно, заметили, что последний пример получен из примера 9 нашей статьи «Иррациональные уравнения» заменой знака равенства на знак неравенства. Ниже помещено несколько упражнений, часть из них получена тем же способом. Вы можете аналогично использовать и остальные задачи этого раздела указанной статьи.

**Упражнения.** Решите неравенства

21.  $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} > 1$ .

22.  $\sqrt{3x} - \sqrt{1+x} < 1 - 2x$ .

23.  $\sqrt{2x^2-1} - \sqrt{x} > \frac{2x^2-x-1}{2}$ .

24.  $\sqrt{3x^2-1} + \sqrt{x^2-x+1} > \sqrt{3x^2+2x+1} + \sqrt{x^2+2x+4}$ .

### Использование некоторых свойств функций

Начнем с примера.

**Пример 16.** Решите неравенство  $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1} < 6$ .

**Решение.** Заметим, что левая часть неравенства – возрастающая функция (этот достаточно очевидный факт в случае необходимости – например, на экзамене – легко доказать). Угадав, при каком значении  $x$  левая часть равна правой (конечно, при  $x = 5$ ), и учтя ОДЗ исходного неравенства ( $x \geq 1$ ), можно записывать ответ.

**Ответ:**  $1 \leq x < 5$ .

Мы не выписали подробно рассуждение, которое привело к ответу: поскольку левая часть – возрастающая функция (обозначим ее через  $f(x)$ ), при  $1 \leq x < 5$  имеем  $f(5) < f(x) = 6$ , т.е. данное неравенство выполняется, а при  $x \geq 5$  по той же причине (из-за возрастания функции  $f(5) \leq f(x)$ ), т.е. данное неравенство не выполняется; так как исследование проведено при всех допустимых значениях  $x$ , решение закончено.

Рассуждая аналогично, можно выписать общее применяемое в этих случаях утверждение:

Пусть на промежутке  $(a; b)$  задана возрастающая функция  $y = f(x)$  и требуется решить неравенство  $f(x) < c$  (или  $f(x) > c$ ). Если  $x_0$  – корень уравнения  $f(x) = c$ , причем  $a < x_0 < b$ , то решения данного неравенства – весь промежуток  $(a; x_0)$  (соответственно промежуток  $(x_0; b)$ ). (Единственность корня следует из монотонности функции  $f$ .) Понятно, что если требуется решить нестрогое неравенство, то при том же рассуждении в ответ войдет и число  $f(x_0)$ , а если функция задана на

замкнутом или на полуоткрытом промежутке, то в ответ войдут соответствующие концы промежутка.

**Пример 17.** Решите неравенство  $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt{x-3} > \sqrt{2-\sqrt[4]{x}}$ .

**Решение.** Найдем допустимые значения переменного:

$$\begin{cases} x-2 \geq 0, \\ x-3 \geq 0, \\ 2-\sqrt[4]{x} \geq 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 16.$$

Левая часть данного неравенства (обозначим ее через  $f(x)$ ) – возрастающая функция, правая (назовем ее  $g(x)$ ) – убывающая. При  $x = 3$  имеем

$$f(3) = 1 > g(3) = \sqrt{2-\sqrt[4]{3}},$$

т.е. данное неравенство выполняется. Но при увеличении  $x$  левая часть становится (в силу возрастания) еще больше, а правая (из-за убывания) – еще меньше, т.е. неравенство между соответствующими значениями функций  $f(x)$  и  $g(x)$  сохранится.

**Ответ:**  $3 \leq x \leq 16$ .

В примере 17 мы встретились с новой ситуацией: надо было на промежутке  $[a; b]$  решить неравенство, где левая часть возрастала, а правая – убывала. Мы выяснили, что на левом конце промежутка неравенство выполняется, и сделали вывод, что тогда оно выполняется и на всем промежутке. В несколько более общей ситуации можно сформулировать такое обобщение нашего стандартного рассуждения.

Пусть на промежутке  $(a; b)$  заданы возрастающая функция  $y = f(x)$  и убывающая функция  $y = g(x)$  и требуется решить неравенство  $f(x) > g(x)$ . Если  $x_0$  – корень уравнения  $f(x) = g(x)$ , лежащий на рассматриваемом промежутке, то решения данного неравенства – все числа из промежутка  $(x_0; b)$ .

**Упражнение 25.** а) Докажите утверждение, сформулированное в предыдущем абзаце текста.

б) Рассмотрите различные варианты знаков неравенств (строгих и нестрогих), а также типов промежутков (включающих концы или нет), которые могут встретиться в рассуждении п. а), и для каждого варианта найдите ответ.

в) Рассмотрите все ситуации п. б), если на рассматриваемом промежутке не существует корня  $x_0$  уравнения  $f(x) = g(x)$ .



**Пример 18.** Решите неравенство

$$\sqrt{x + \sqrt{x^3} + \sqrt{x^5}} - \sqrt{3} < \sqrt{x} - 1.$$

**Решение.** Допустимые значения неизвестного – все неотрицательные числа. Заметим, что обе части данного неравенства – возрастающие функции, поэтому пока что рассматриваемый метод неприменим. Но попробуем преобразовать данное неравенство. Оно равносильно такому:

$$\sqrt{x + x\sqrt{x} + x^2\sqrt{x}} - \sqrt{x} < \sqrt{3} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} \left( \sqrt{1 + \sqrt{x} + x\sqrt{x}} - 1 \right) < \sqrt{3} - 1.$$

В последнем полученном нами неравенстве справа – константа, а слева – возрастающая функция (она равна произведению двух неотрицательных возрастающих функций). Осталось заметить, что при  $x = 1$  левая часть равна правой, поэтому, в силу наших стандартных утверждений, ответ – все допустимые значения  $x$ , меньшие 1.

**Ответ:**  $0 \leq x < 1$ .

**Замечания.** 1. При доказательстве возрастания левой части преобразованного неравенства в примере 18 мы существенно использовали *неотрицательность* возрастающих сомножителей. Без этого условия утверждение о возрастании произведения возрастающих функций может быть неверным: например, если  $x < 0$ , произведение возрастающей функции  $y = x$  на себя – функция  $y = x^2$ , – как известно, убывает.

2. Для доказательства монотонности можно, конечно, использовать и производную функции.

**Упражнения.** Решите неравенства

26.  $x^5 + 2x^4 + \sqrt{x} > 4$ .

27.  $x^{15} + 3\sqrt[4]{x-1} \geq 1$ .

28.  $\sqrt{x+3} + 3\sqrt{3x-2} < 15$ .

29.  $\sqrt{x} - \sqrt{1-x} > 0,5$ .

30.  $\sqrt[4]{x^4 + 66} > x + 1$ , если  $0 < x < 2$ .

31.  $\sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} > 1$ .

А вот пример другого рода.

**Пример 19.** Решите неравенство  $\sqrt{3 \pm x^2} + \sqrt{x+1} \geq \sqrt{x^2 \pm 1}$ .

**Решение.** Найдем ОДЗ:

$$x = -1; 1 \leq x \leq \sqrt{3}.$$

Сначала убедимся прямой подстановкой, что  $x = -1$  – решение нашего неравенства. Далее, при  $1 \leq x \leq \sqrt{3}$  выполняются неравенства  $\sqrt{3-x^2} \geq 0$ ,  $\sqrt{x+1} \geq \sqrt{2}$ , но  $\sqrt{x^2-1} \leq \sqrt{2}$ , поэтому данное неравенство выполняется на всей своей области определения.

**Ответ:**  $x = -1$ ;  $1 \leq x \leq \sqrt{3}$ .

Похожие идеи лежат в основе решения и следующей задачи.

**Пример 20.** Решите неравенство  $\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} + x > 3$ .

**Решение.** ОДЗ исходного неравенства:  $x < -2$ ;  $x > 2$ . Заметим, что отрицательные значения неизвестного не могут быть решениями задачи, так как тогда отрицательная левая часть неравенства не может быть больше положительной правой; таким образом, из ОДЗ осталось исследовать только случай  $x > 2$ . Но тогда  $\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2-4}} > 1$  (поскольку числитель дроби, очевидно, больше знаменателя); итак, первое слагаемой левой части больше 1, а второе – больше 2, поэтому их сумма – вся левая часть данного неравенства – больше 3, что и требуется.

**Ответ:**  $x > 2$ .

Итак, мы убедились в том, что иногда полезно найти область определения данного неравенства (или, что то же самое, его ОДЗ) и непосредственно исследовать ситуацию на этой области – оценить значения его левой и правой частей.

**Упражнения.** Решите неравенства

32.  $\sqrt{x-2} + 5\sqrt{2x-1} \leq 3\sqrt{3-2x}$ .

33.  $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{x-1} \leq 2$ .

34.  $|x| + \sqrt{x^2-1} \geq 1$ .

35.  $\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x^2} + \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} > 1$ .

36.  $\frac{\lg(|x|+1)}{\lg(|x|-1)} + \sqrt{x^2-4} > 1$ .

37.  $\sqrt{x-2} + 2^x > 9$ .

38.  $4^{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} < 0$ .

39.  $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3$ .

## МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИИ В КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧАХ

*А.Егоров, Ж.Раббот*

Метод решения задач, который мы рассмотрим в этой статье, применим как к обычным школьным задачам, так и к более сложным, часто называемым нестандартными.

При изучении школьного курса алгебры и особенно начал математического анализа вам часто приходилось выяснять, возрастает или убывает та или иная функция. Мы постараемся в этой статье показать, что использование монотонности функций, входящих в уравнение или неравенство (иногда вообще не фигурирующих в условии, а появляющихся по ходу решения), нередко сильно упрощает техническую часть решения, а порой без него просто невозможно решить задачу.

### Теорема о корне

Сначала напомним основное определение.

Функция  $y = f(x)$  называется *монотонно возрастающей* (соответственно *монотонно убывающей*) на некотором промежутке, если для любых  $x_1$  и  $x_2$  из этого промежутка из неравенства  $x_1 < x_2$  следует неравенство  $f(x_1) < f(x_2)$  (соответственно,  $f(x_1) > f(x_2)$ ).

Наглядный смысл возрастания или убывания функции прозрачен – график возрастающей функции при движении по нему слева направо идет все выше и выше (а убывающей – все ниже и ниже). Мы, естественно, предполагаем, что оси координат расположены стандартным образом: ось абсцисс  $Ox$  горизонтальна и направлена слева направо, а ось ординат  $Oy$  вертикальна и направлена снизу вверх.

Если функция возрастает на некотором промежутке или убывает на этом промежутке, говорят, что она *монотонна* на этом промежутке.

Первый факт, часто использующийся при решении задач, в том или ином виде доказан в вашем школьном курсе (например, в учебнике для 10–11 классов под редакцией А.Н.Колмогорова

он приводится под названием «Теорема о корне» при введении обратных тригонометрических функций в начале 10 класса). Напомним его.

(А) Пусть функция  $f$  возрастает (или убывает) на промежутке  $I$ , число  $a$  – любое из значений, принимаемых  $f$  на этом промежутке. Тогда уравнение  $f(x) = a$  имеет единственный корень в промежутке  $I$ .

Нам иногда будет удобнее несколько иная формулировка этого факта.

(А\*) Пусть  $y = f(x)$  – монотонная на некотором промежутке функция. Тогда при любом значении  $a$  уравнение  $f(x) = a$  имеет на этом промежутке не более одного корня.

Наглядный смысл теоремы о корне (А) и ее переформулировки (А\*) также прозрачен – горизонтальная прямая  $y = a$  может пересечь график монотонной функции  $y = f(x)$  не более чем в одной точке (т.е. либо вообще его не пересекает, либо пересекает в единственной точке).

Начнем с совсем простой задачи.

**Задача 1.** Решите уравнение

$$x^3 + x = 10. \quad (1)$$

**Решение.** Сразу заметим, что левая часть данного уравнения – функция, возрастающая на всей числовой прямой (это очень легко доказать). Следовательно, уравнение (1) имеет не более одного корня – теорема (А\*). Но корень легко угадать: при  $x = 2$  левая часть данного уравнения равна правой.

**Ответ:**  $x = 2$ .

Решим теперь чуть более трудную задачу.

**Задача 2.** Решите уравнение

$$\sqrt{37x + 12} - \sqrt{31 - 6x} = 2. \quad (2)$$

**Комментарий.** Уравнение (2) можно решить стандартным школьным способом, почленно возведя (дважды) промежуточные иррациональные уравнения в квадрат, найдя затем корни полученного квадратного уравнения с многозначными коэффициентами и произведя после этого отсев возможных посторонних решений. Однако задача допускает решение «в одну строчку».

**Решение.** Левая часть уравнения (2) – возрастающая в своей области определения функция (первый радикал при увеличении  $x$ , очевидно, увеличивается, а второй – уменьшается, но он вычитается из первого, поэтому их разность возрастает). По теореме (А\*) уравнение (2) имеет не более одного решения. Его легко предъявить: это  $x = 1$ . Действительно, при подстановке

этого значения неизвестного в (2) получается верное равенство  $7 - 5 = 2$ .

**Ответ:**  $x = 1$ .

**Замечания.** 1. Откуда взялся корень  $x = 1$ ? Мы его просто угадали! Некоторые школьники считают приведенное решение «нестрогим» – как это можно что-то угадывать? Но в нашем решении все в порядке – доказано, что решений не больше одного и предъявлено решение (неважно, откуда мы его взяли). Кстати, угадать решение было довольно просто – мы начали перебирать целые неотрицательные значения  $x$  и искать, при каких из них «извлекается» второй корень (там просто меньше коэффициенты, чем под знаком первого корня). При  $x = 0$  корень «не извлекается», а при  $x = 1$  – извлекается (под корнем получился полный квадрат – число 25), тогда мы подставили  $x = 1$  в уравнение (2) и получили верное равенство. Начинали мы с  $x = 0$ , так как при отрицательных целых  $x$  первый радикал не существует – подкоренное выражение отрицательно. Конечно, угадать корень можно далеко не всегда, но мы и не претендуем на универсальность такого подхода к решению.

2. Насколько строго наше доказательство монотонности левой части уравнения (2)? На наш взгляд, приведенного нами рассуждения вполне достаточно, но при необходимости его легко формализовать. Пусть  $x_1$  и  $x_2$  – произвольные числа из области определения левой части уравнения (2), причем  $x_1 > x_2$ . Введем обозначения:

$$f(x) = \sqrt{37x + 12}, \quad g(x) = \sqrt{31 - 6x}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \sqrt{37x_1 + 12} - \sqrt{37x_2 + 12} = \\ &= \frac{(37x_1 + 12) - (37x_2 + 12)}{\sqrt{37x_1 + 12} + \sqrt{37x_2 + 12}} = \frac{37(x_1 - x_2)}{\sqrt{37x_1 + 12} + \sqrt{37x_2 + 12}} > 0, \\ \text{т.е. } f(x_1) - f(x_2) &> 0. \quad (2^*) \end{aligned}$$

(Заметим, что как это нередко бывает при преобразовании выражений, содержащих квадратные радикалы, нам помогло умножение и деление разности корней на сопряженное выражение – сумму этих же квадратных корней.)

Аналогично,

$$\begin{aligned} g(x_1) - g(x_2) &= \frac{-6(x_1 - x_2)}{\sqrt{31 - 6x_1} + \sqrt{31 - 6x_2}} < 0, \\ \text{т.е. } g(x_1) - g(x_2) &< 0. \quad (2^{**}) \end{aligned}$$

Наконец, обозначив левую часть уравнения (2), т.е.  $f(x) - g(x)$ , через  $h(x)$  и почленно вычтя из неравенства (2\*) неравенство (2\*\*)¹, получим  $(f(x_1) - g(x_1)) - (f(x_2) - g(x_2)) > 0$ . Но это значит, что  $h(x_1) - h(x_2) > 0$ , т.е. функция  $h(x)$  монотонно возрастает, что и утверждалось в нашем решении задачи 1.

Решая следующие упражнения, потренируйтесь в угадывании корней.

### Упражнения

1. Решите уравнения:

а)  $2x^3 + x - 3 = 0$ ;      б)  $x^5 + 3x^3 + 4 = 0$ ;

в)  $2^x + x = 6$ ;      г)  $\lg x + \sqrt{x-1} = 4$ .

2. Решите уравнения:

а)  $\sqrt{5x+1} + \sqrt{17x+13} = 12$ ; б)  $\sqrt[3]{3x+2} + \sqrt[3]{x-2} + \sqrt[5]{14x+4} = 4$ ;

в)  $\sqrt{x} - \sqrt{5-x} = 1$ .

3. Исследуйте на монотонность функции:

а)  $y = x + \frac{1}{x}$  при  $x > 1$ ;      б)  $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ ;

в)  $y = 2^x - 3^x$  при  $x > 0$ ;      г)  $y = 5^x - 3^x$  при  $x > 0$ ;

д)  $y = \log_3 x - \log_2 x$  при  $0 < x < 1$ ;

е)  $y = a^x - b^x$  при  $x < 0$  и  $0 < a < b < 1$ ;

ж)  $y = \log_a x - \log_b x$  при  $a > b > 1$ .

### Сумма и разность монотонных функций

Сейчас мы сформулируем два важных свойства монотонных функций (мы ими, по существу, уже пользовались).

(В) а) *Сумма возрастающих (соответственно, убывающих) функций – функция, возрастающая (соответственно, убывающая) на их общей области определения.*

б) *Разность возрастающей и убывающей (соответственно, убывающей и возрастающей) функций – функция, возрастающая (соответственно, убывающая) на их общей области определения.*

---

¹ Здесь мы используем известное свойство числовых неравенств: неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать, сохраняя знак уменьшаемого неравенства (того, **из которого** вычитают). Вообще мы советуем повторить свойства неравенств, поскольку ими часто приходится пользоваться при исследовании функций (в частности, на монотонность).

**Упражнение 4.** Докажите оба утверждения (В).

*Указание.* Можно использовать известные вам свойства числовых неравенств.

Понятно, что первое из свойств (В) верно для любого конечного числа слагаемых функций.

**Задача 3.** Решите уравнение

$$\sqrt[3]{4x-1} + \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[9]{x-6} = 6.$$

*Комментарий.* Конечно, невозможно решить это уравнение почленным возведением в степень (девятую, третью, причем неоднократно!). Это, как ни странно, сильно облегчает задачу – предостерегает от неправильного пути и заставляет искать другие способы.

**Решение.** Левая часть данного уравнения – возрастающая функция (см. утверждение (В)). Поэтому, согласно (А\*), у него не более одного корня. Решение легко предъявить – это  $x = 7$ : при подстановке его в уравнение получаем, что  $3 + 2 + 1 = 6$ , это – верное равенство.

**Ответ:**  $x = 7$ .

Теперь рассмотрим задачу, для решения которой в указанном духе удобно привлечь идею симметрии (эта задача предлагалась на заочном туре одной из Соросовских олимпиад).

**Задача 4.** Решите уравнение

$$\sqrt{x(x+7)} + \sqrt{(x+7)(x+17)} + \sqrt{(x+17)(x+24)} = 12 + 17\sqrt{2}. \quad (3)$$

**Решение.** Если записать первое подкоренное выражение в виде  $(x+0)(x+7)$  и нанести на числовую ось четыре числа, которые суммируются с неизвестной величиной во всех скобках левой части, мы увидим, что эта система из четырех точек имеет центр симметрии – точку 12 (относительно нее симметрична пара чисел 0 и 24, а также пара 7 и 17). Поэтому замена переменной  $t = x + 12$  (откуда  $x = t - 12$ ) симметризует левую часть уравнения (3), которое примет вид

$$\sqrt{(t-12)(t-5)} + \sqrt{(t-5)(t+5)} + \sqrt{(t+5)(t+12)} = 12 + 17\sqrt{2}. \quad (3^*)$$

Обозначим левую часть уравнения (3\*) через  $f(t)$ . Заметим, что функция  $f(t)$  определена в симметричной относительно нуля области

$$\begin{cases} t \leq -12, \\ t \geq 12 \end{cases}$$

и обладает свойством  $f(-t) = f(t)$ , т.е. является четной. Поэтому достаточно решить уравнение (3\*) для  $t \geq 12$ . Но при этих

значениях  $t$  каждый из трех трехчленов, стоящих под знаком радикала в левой части (3\*), возрастает, значит, возрастают и квадратные корни из этих трехчленов. Поэтому, применив утверждение (В), получим, что при  $t \geq 12$  левая часть (3\*) – возрастающая функция и, значит, уравнение имеет не более одного корня. Находим подбором, что  $t = 13$  – корень (подставив это значение  $t$  в левую часть уравнения (3\*), получим

$$\sqrt{8} + 12 + 5\sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 12 + 15\sqrt{2} = 12 + 17\sqrt{2},$$

что равно правой части).

Итак,  $t = 13$ , откуда  $x = 1$ . Поскольку  $t = -13$  – тоже решение уравнения (3\*), получаем и второй корень исходного уравнения,  $x = -25$ .

**Ответ:**  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = -25$ .

*Замечание.* Конечно, можно не делать замену переменной, а рассуждать о симметрии левой части относительно  $x = 12$  и использовать ее монотонность при  $x \geq 12$ , но это выглядит менее изящно и естественно.

Понятно, что соображения монотонности могут применяться не только при решении уравнений, но и в задачах с неравенствами.

**Задача 5.** Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 + x - 2} + \sqrt{3x - 2} < 4. \quad (4)$$

**Решение.** Найдем область допустимых значений переменной данного неравенства:

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0, \\ 3x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

При этих значениях  $x$  левая часть (4) – возрастающая функция (вершина параболы – графика квадратного трехчлена  $y = x^2 + x - 2$  – имеет абсциссу  $x = -0,5$ , поэтому при  $x \geq 1$  первое подкоренное выражение, а вместе с ним и все первое слагаемое левой части (4), возрастает, второе слагаемое – также возрастающая функция), а правая часть – константа. Поскольку при  $x = 2$  левая часть (4) равна правой, данное неравенство справедливо при всех допустимых значениях  $x$ , меньших 2 (при больших значениях  $x$  левая часть больше, чем при  $x = 2$ ).

**Ответ:**  $1 \leq x < 2$ .

*Замечание.* Полезно отметить, что мы, по существу, использовали следующее утверждение: если  $y = f(x)$  – функция, возрастающая на промежутке  $[a; b]$ , то для любого числа  $c$ , такого что  $a < c < b$ , неравенство  $f(x) < f(c)$  равносильно неравенству  $a < x < c$ .



Решим теперь несколько более сложную задачу.

**Задача 6.** Решите уравнение

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} + x = \frac{24}{5}.$$

**Решение.** Ясно, что отрицательных корней данное уравнение иметь не может (при отрицательных значениях  $x$  его левая часть отрицательна, а правая – положительна). Не очень сложно угадать один его корень:  $x = 4$ . Покажем, что других корней нет.

Для этого убедимся в том, что функция  $y = f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$

возрастает при положительных значениях  $x$ . Действительно,

при таких  $x$  справедливо равенство  $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}}$ . Далее

рассуждаем стандартным образом: подкоренное выражение в знаменателе последней дроби при  $x > 0$  убывает, поэтому и сам знаменатель убывает, но тогда дробь возрастает – ее числитель не меняется, а знаменатель убывает.

**Ответ:**  $x = 4$ .

**Замечание.** Очень важно научиться легко ориентироваться в подобных ситуациях: что будет с дробью, если ее числитель растет, а знаменатель убывает и при этом (очень важно!) они положительны (или отрицательны); числитель убывает, знаменатель растет и т.п.

### Упражнения

5. Исследуйте на монотонность функции:

а)  $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ ;    б)  $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ ;    в)  $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ .

6. Решите уравнения и неравенства:

а)  $\sqrt{x^2 - 2x + 3} + \sqrt{x - 1} + \sqrt[3]{x - 3} = \sqrt{3}$ ;

б)  $\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} - x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;    в)  $4^x - 3^x = 37$ ;    г)  $x^{10} + \sqrt{x - 1} \geq 33$ ;

д)  $x^5 + x^3 + 2\sqrt{x} \geq 4$ ;    е)  $2^{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} < 1$ .

### «Встречная» монотонность

Приведем теперь еще одну очевидную, но часто употребляющуюся переформулировку теоремы (А) о корне (ее иногда называют теоремой о «встречной монотонности»).

(А\*\*) Пусть функция  $y = f(x)$  возрастает на промежутке  $I$ , а функция  $y = g(x)$  убывает на этом промежутке. Тогда уравнение  $f(x) = g(x)$  имеет на промежутке  $I$  не более одного корня.

**Задача 7.** Решите уравнение

$$x^2 - x + 2 = \sqrt{x+7} - \sqrt{x-1}. \quad (5)$$

**Решение.** Правая часть уравнения (5) – функция, убывающая на своей области определения, т.е. при всех значениях  $x \geq 1$ :

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{x-1} = \frac{(x+7) - (x-1)}{\sqrt{x+7} + \sqrt{x-1}} = \frac{8}{\sqrt{x+7} + \sqrt{x-1}};$$

очевидно, что дробь, у которой числитель постоянен, а знаменатель возрастает, убывает. С другой стороны, при  $x \geq 1$  квадратный трехчлен, стоящий в левой части уравнения (5), возрастает, так как вершина его графика, параболы, имеет абсциссу, равную 0,5, а ее ветви направлены вверх. Таким образом, у нас имеется ситуация, описанная в утверждении (А\*\*), и уравнение (5) имеет не более одного корня. Но при  $x = 2$  левая часть (5) равна правой.

**Ответ:**  $x = 2$ .

**Задача 8.** Решите неравенство  $3^x - 7 > 4^{\frac{1}{x}}$ .

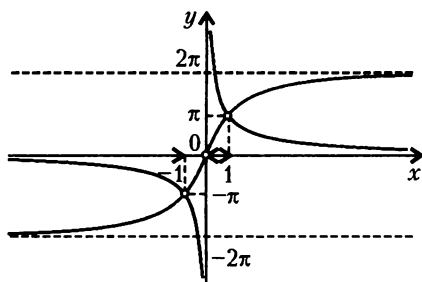
**Решение.** Очевидно, при  $x < 0$  неравенство решений не имеет: его левая часть отрицательна, а правая – положительна;  $x = 0$  – тоже не решение. Пусть теперь  $x > 0$ . Тогда левая часть данного неравенства возрастает, а правая – убывает (с ростом  $x$  показатель степени убывает) – опять «встречная» монотонность. При  $x = 2$  левая часть равна правой (и равна 2): Поэтому при  $x > 2$  левая часть больше двух, а правая часть – меньше двух и данное неравенство будет выполнено. При  $0 < x < 2$  левая часть меньше двух, а правая – больше, так что эти значения  $x$  не являются решениями.

**Ответ:**  $x > 2$ .

**Задача 9.** Решите неравенство

$$4\arctg x < \frac{\pi}{x}.$$

**Решение.** Функция  $y = 4\arctg x$  возрастает на всей числовой оси. Функция  $y = \frac{\pi}{x}$  убывает и при  $x < 0$ , и при  $x > 0$ . Поэтому рассмотрим отдельно отрицательные и положительные значения



$x$ . На каждом из этих множеств имеется «встречная» монотонность (см. рисунок). Корни соответствующего уравнения угадываются легко:  $x = \pm 1$  (можно воспользоваться и нечетностью левой и правой части).

**Ответ:**  $x < -1$ ,  $0 < x < 1$ .

**Замечание.** Обратите внимание на то, что мы рассматривали отдельно два промежутка монотонности правой части. Дело в том, что все наши рассуждения верны лишь на общем промежутке монотонности двух функций. Если бы мы забыли, что правая часть монотонна не на всей числовой прямой, а лишь на полуосях оси абсцисс, произошла бы ошибка; например, «при  $x = 1$  левая и правая части равны, левая часть возрастает, правая — убывает, поэтому при всех  $x < 1$ ,  $x \neq 0$  неравенство верно».

**Упражнение 7.** Решите уравнения и неравенства:

- а)  $2\sqrt[3]{x^2 + x - 1} = \sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 1}$ ;      б)  $4^{\frac{1}{x}} - 1 = 3^{2x-1}$ ;  
 в)  $\log_3(1 + \sqrt{x}) = 5 - x$ ;      г)  $\log_2 x - \log_3 x = \sqrt{1 - x}$ ;  
 д)  $\arcsin x < \arccos x$ .

### Преобразование к монотонным функциям

Во всех рассмотренных ранее задачах мы имели дело с монотонными левыми и правыми частями уравнений и неравенств, причем это была «нужная» монотонность — либо «встречная», либо с одной стороны монотонная функция, а с другой — константа. Чаше встречается ситуация, когда надо предварительно привести данное соотношение к такому виду, чтобы получились удобные для приведенных нами рассуждений функции. Вот классический пример такой задачи.

**Задача 10.** Решите уравнение

$$3^x + 4^x = 5^x. \quad (6)$$

**Комментарий.** Конечно, корень  $x = 2$  «виден» сразу (вы, наверно, помните «египетский» прямоугольный треугольник), но доказать его единственность аналогично предыдущим случаям не удастся: ведь в уравнении (6) и левая, и правая части возрастают и применять к этому уравнению утверждение (А\*\*) не удастся.

мы не можем. Но с этой ситуацией в нашем случае легко справиться.

**Решение.** Разделив обе части уравнения (6) на не равную нулю (и даже положительную) при всех значениях  $x$  функцию  $5^x$ , приходим к уравнению

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1, \quad (6^*)$$

у которого левая часть убывает, а в правой — константа. По теореме (А) уравнение (6\*) имеет не более одного корня, но  $x = 2$  — корень.

**Ответ:**  $x = 2$ .

К рассмотренной задаче примыкает и следующая, чуть более сложная задача.

**Задача 11.** Пусть положительные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  при некотором положительном  $k$  удовлетворяют соотношению

$$a^k + b^k = c^k. \quad (7)$$

а) При каких значениях  $k$  существует треугольник со сторонами  $a$ ,  $b$  и  $c$ ?

б) Выясните, как зависит от  $k$  вид треугольника со сторонами  $a$ ,  $b$  и  $c$ , когда он существует.

**Комментарий.** Конечно, мы должны преобразовать уравнение в духе решения задачи 10 и воспользоваться монотонностью левой части полученного уравнения. Кроме того, мы используем тот факт, что если  $c$  — наибольшее из трех данных чисел, то для существования искомого треугольника необходимо и достаточно выполнение неравенства  $c < a + b$ . Для решения пункта б) вспомним, что треугольник со сторонами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , где сторона  $c$  — наибольшая, *остроугольный*, если  $a^2 + b^2 > c^2$ , *прямоугольный*, если  $a^2 + b^2 = c^2$ , и *тупоугольный*, если  $a^2 + b^2 < c^2$  (это вытекает, например, из теоремы косинусов).

**Решение.** Ясно, что  $c$  — наибольшее из трех данных чисел, ведь  $c^k = a^k + b^k > a^k$ , откуда  $\left(\frac{c}{a}\right)^k > 1$ , поэтому  $\frac{c}{a} > 1$ , т.е.  $c > a$ ; аналогично,  $c > b$ . Далее, разделив обе части данного уравнения на положительное число  $c^k$ , получим

$$\left(\frac{a}{c}\right)^k + \left(\frac{b}{c}\right)^k = 1. \quad (7^*)$$

а) В левой части уравнения (7\*) стоит сумма монотонно убывающих функций, поэтому при  $k \leq 1$  одновременно выпол-

няются неравенства  $\left(\frac{a}{c}\right)^k \geq \frac{a}{c}$  и  $\left(\frac{b}{c}\right)^k \geq \frac{b}{c}$ . Складывая полученные неравенства и используя уравнение (7\*), получаем, что при этих значениях  $k$

$$1 = \left(\frac{a}{c}\right)^k + \left(\frac{b}{c}\right)^k \geq \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \text{ т.е. } a+b \leq c.$$

Итак, при  $0 < k \leq 1$  треугольник со сторонами  $a$ ,  $b$  и  $c$  не существует.

Осталось рассмотреть случай  $k > 1$ . В этом случае из монотонного убывания слагаемых левой части уравнения (7\*) вытекает, что одновременно выполняются неравенства  $\left(\frac{a}{c}\right)^k < \frac{a}{c}$  и  $\left(\frac{b}{c}\right)^k < \frac{b}{c}$ , откуда аналогично получим, что  $a+b > c$ , т.е. треугольник существует.

б) Снова воспользуемся монотонным убыванием слагаемых, стоящих в левой части уравнения (7\*), только теперь нам надо сравнивать  $k$  не с единицей, как в пункте а), а с числом 2 (см. комментарий); при этом, конечно, не будем забывать, что теперь у нас  $k > 1$  (ведь треугольник с данными сторонами существует).

Если  $1 < k < 2$ , одновременно выполняются неравенства  $\left(\frac{a}{c}\right)^2 < \left(\frac{a}{c}\right)^k$  и  $\left(\frac{b}{c}\right)^2 < \left(\frac{b}{c}\right)^k$ . Сложив почленно эти неравенства, получаем, что при этих значениях  $k$  выполнено неравенство  $a^2 + b^2 < c^2$ , т.е. треугольник тупоугольный. Аналогично рассматриваются два остальных случая.

**Ответ:** а) при  $k > 1$ ; б) при  $1 < k < 2$  треугольник тупоугольный, при  $k = 2$  – прямоугольный, при  $k > 2$  – остроугольный.

Приведем две задачи, где не только обнаружить, но и доказать монотонность довольно сложно. При этом по традиции, сложившейся на вступительных экзаменах в МГУ, где давались эти задачи (факультет психологии, 1982 г., и химический факультет, 1998 г.), мы постараемся обойтись без использования производной (ее применение, конечно, не запрещено, но задачи составляются так, чтобы можно было обосновать монотонность непосредственно).

**Задача 12.** Решите уравнение

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} (x^2 + 2x - 2) = \log_{2+\sqrt{3}} (x^2 + 2x - 3). \quad (8)$$

**Комментарий.** Поскольку под знаком логарифма стоят квадратные трехчлены с положительным старшим коэффициентом, ни о какой монотонности в таком виде не может быть и речи. С другой стороны, эти трехчлены, а также основания логарифмов очень «похожи», как-то связаны друг с другом, так что попробуем удачно преобразовать основания и сделать хорошую замену переменной. Обратите внимание на то, как мы далее получим монотонную функцию, и постарайтесь освоить этот прием.

**Решение.** Во-первых, очевидно, что  $x^2 + 2x - 2 = (x^2 + 2x - 3) + 1$ , так что, если обозначить  $x^2 + 2x - 3$  через  $t$ , то  $x^2 + 2x - 2 = t + 1$ .

Во-вторых, заметим, что

$$2\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{1 + (7 + 4\sqrt{3})} = \sqrt{1 + (2 + \sqrt{3})^2},$$

поэтому, если обозначить  $7 + 4\sqrt{3}$  через  $a$ , можно провести следующую цепочку равносильных в области определения преобразований данного уравнения (конечно, с учетом введенных обозначений):

$$(8) \Leftrightarrow \log_{\sqrt{1+a}}(t+1) = \log_{\sqrt{a}} t \Leftrightarrow \log_{a+1}(t+1) = \log_a t. \quad (8^*)$$

Заметим теперь, что, очевидно,  $a = 7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2 > 1$ ,  $t > 0$  (иначе не существует логарифм в правой части  $(8^*)$ ), поэтому  $t + 1 > 1$ , но тогда  $t > 1$  (в противном случае левая часть уравнения  $(8^*)$ ) положительна, а правая — отрицательна). Итак, мы пришли к уравнению  $(8^*)$ , где  $t > 1$ ,  $a > 1$ .

Перейдем в уравнении  $(8^*)$  к новому основанию логарифмов, например, к основанию 2:

$$(8^*) \Leftrightarrow \frac{\log_2(t+1)}{\log_2(a+1)} = \frac{\log_2 t}{\log_2 a} \Leftrightarrow \frac{\log_2(t+1)}{\log_2 t} = \frac{\log_2(a+1)}{\log_2 a}. \quad (8^{**})$$

Если обозначить теперь через  $f(z)$  функцию  $\frac{\log_2(z+1)}{\log_2 z}$ , то, как легко видеть, уравнение  $(8^{**})$  можно записать в виде

$$f(t) = f(a). \quad (8^{***})$$

Это уравнение имеет, очевидно, корень  $t = a$ . Если нам удастся доказать, что функция  $y = f(z)$  монотонна при  $z > 1$ , из этого будет следовать (теорема о корне), что других решений нет. Докажем это.

Для этого достаточно заметить, что при всех  $k$ , кроме нуля, выполняется равенство  $k + 1 = k \left( 1 + \frac{1}{k} \right)$ . Поэтому при всех допустимых в нашей задаче значениях  $z$  (т.е. при  $z > 1$ )

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\log_2(z+1)}{\log_2 z} = \frac{\log_2 \left( z \left( 1 + \frac{1}{z} \right) \right)}{\log_2 z} = \\ &= \frac{\log_2 z + \log_2 \left( 1 + \frac{1}{z} \right)}{\log_2 z} = 1 + \frac{\log_2 \left( 1 + \frac{1}{z} \right)}{\log_2 z}. \end{aligned}$$

При  $z > 1$  сумма  $1 + (1/z)$ , очевидно, убывает; логарифм по основанию 2 – возрастающая функция, т.е. числитель последней дроби в последнем равенстве убывает, а знаменатель возрастает. А так как они при этом еще и положительны, эта дробь убывает с ростом  $z$ .

Таким образом, функция  $y = f(z)$  убывает при  $z > 1$ , и уравнение (8\*\*\*) имеет единственное решение  $t = a$ . Осталось найти корни исходного уравнения (8):

$$x^2 + 2x - 3 = 7 + 4\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{11 + 4\sqrt{3}}.$$

**Ответ:**  $-1 \pm \sqrt{11 + 4\sqrt{3}}$ .

В решении последней задачи нам встретились важные соображения, которые мы сформулируем в виде следующих утверждений.

(С) а) Если числитель и знаменатель дроби положительны, числитель убывает (возрастает), а знаменатель возрастает (соответственно, убывает), то дробь убывает (возрастает). (См. также замечание после решения задачи 6.)

б) Если функция  $y = g(x)$  определена и возрастает (соответственно, убывает) на промежутке  $I$ , а функция  $z = f(y)$  определена и возрастает на промежутке  $I_1$ , содержащем область значений функции  $g$ , то сложная функция  $y = f(g(x))$ , определена и возрастает (соответственно, убывает) на промежутке  $I$ .

**Задача 13.** Решите уравнение

$$\begin{aligned} \log_2(4x+1) \log_5(4x+4) + \log_3(4x+2) \log_4(4x+3) = \\ = 2 \log_3(4x+2) \log_5(4x+4). \quad (9) \end{aligned}$$

**Решение.** Сделаем замену переменной  $t = 4x + 1$  и, разбив правую часть данного уравнения на два одинаковых слагаемых, преобразуем уравнение (9) так, чтобы можно было разложить левую и правую части нового уравнения на множители:

$$\begin{aligned} \log_2 t \log_5 (t + 3) - \log_3 (t + 1) \log_5 (t + 3) &= \\ &= \log_3 (t + 1) \log_5 (t + 3) - \log_3 (t + 1) \log_4 (t + 2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_5 (t + 3) (\log_2 t - \log_3 (t + 1)) = \\ &= \log_3 (t + 1) (\log_5 (t + 3) - \log_4 (t + 2)) . \quad (9^*) \end{aligned}$$

Заметим теперь, что уравнение (9\*) имеет корень  $t = 2$  (это число обращает в нули скобки в его правой и левой частях), и попробуем показать, что других корней оно (а вместе с ним и данное уравнение) не имеет.

Рассмотрим функцию  $f(z) = \log_a z - \log_{a+1}(z + 1)$ , где  $a > 1$ , и докажем ее монотонность. Для этого преобразуем разность логарифмов, перейдя во втором логарифме к основанию  $a$  и используя для представления суммы  $(z + 1)$  тот же прием, что в предыдущей задаче:

$$\begin{aligned} f(z) &= \log_a z - \frac{\log_a (z + 1)}{\log_a (a + 1)} = \log_a z - \frac{\log_a \left( z \left( 1 + \frac{1}{z} \right) \right)}{\log_a (a + 1)} = \\ &= \log_a z - \frac{\log_a z + \log_a \left( 1 + \frac{1}{z} \right)}{\log_a (a + 1)} = \\ &= \left( \log_a z - \frac{\log_a z}{\log_a (a + 1)} \right) - \frac{\log_a \left( 1 + \frac{1}{z} \right)}{\log_a (a + 1)} = \\ &= \log_a z \left( 1 - \log_{a+1} a \right) - \log_{a+1} \left( 1 + \frac{1}{z} \right) . \end{aligned}$$

Заметим теперь, что функцию  $f(z)$  нам удалось представить как разность возрастающей функции  $\log_a z (1 - \log_{a+1} a)$  (она возрастает, так как  $\log_{a+1} a < 1$ , поэтому  $1 - \log_{a+1} a > 0$  и функция  $\log_a z$  возрастает — по условию,  $a > 1$ ) и убывающей функции  $\log_{a+1} \left( 1 + \frac{1}{z} \right)$ . Поэтому (см. утверждение (B)) функция  $f(z)$  возрастает.

Осталось заметить, что первый множитель в левой части уравнения (9\*) положителен при всех допустимых значениях  $t$



(т.е. при всех  $t > 0$ ), а второй множитель – это функция  $f(z)$  при  $a = 2$ , а раз она возрастает и равна, как мы видели, нулю при  $t = 2$ , то левая часть уравнения (9\*) отрицательна при  $t < 2$  и положительна при  $t > 2$ . Первый множитель правой части уравнения (9\*) также положителен при всех  $t > 0$ , а второй множитель – это взятая со знаком минус функция  $f(z)$  при  $a = 4$ . Поэтому при всех допустимых значениях  $t$ , кроме  $t = 2$ , левая и правая части уравнения (9\*) имеют разные знаки и их значения не могут совпадать, т.е. это уравнение имеет единственный корень  $t = 2$ . Отсюда получаем ответ.

**Ответ:**  $x = 1/4$ .

Теперь привлечем соображения монотонности к решению системы уравнений.

**Задача 14.** *Решение систему уравнений*

$$\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6, \\ x^6 + x^2 = 8y^3 + 2y. \end{cases}$$

**Решение.** Заметим, что пара  $x = 0, y = 0$  – решение данной системы. Если же  $y \neq 0$ , то и  $x \neq 0$ . Перепишем первое уравнение так:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^5 + \frac{x}{y} = y^5 + y.$$

Поскольку функция  $f(t) = t^5 + t$  возрастающая, из полученного равенства следует, что

$$\frac{x}{y} = y, \text{ т.е. } x = y^2.$$

Аналогично, из возрастания функции  $g(t) = t^3 + t$  следует, что второе уравнение равносильно уравнению

$$x^2 = 2y.$$

Осталось решить систему

$$\begin{cases} x = y^2, \\ x^2 = 2y. \end{cases}$$

**Ответ:**  $(2\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{2})$ .

### Упражнения

8. Решите уравнения:

а)  $(2x + 1)\left(2 + \sqrt{(2x + 1)^2 + 3}\right) + 3x\left(2 + \sqrt{9x^2 + 3}\right) = 0;$

$$6) \log_2(3x+1)\log_5(x+4) + \log_3(3x+2) \cdot \log_4(3x+3) = \\ = 2\log_3(3x+2)\log_5(3x+4).$$

9. Решите системы уравнений:

$$a) \begin{cases} x + \sin x = y + \sin y, \\ x^2 + 3xy + y^2 = 1; \end{cases} \quad б) \begin{cases} x^5 + x = y + \sqrt[5]{y}, \\ 2x^3 = 3y^2; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} 2^x + x = y + \log_2 y, \\ \log_2 x + y = 5. \end{cases}$$

10. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$4^{-|x-a|} \log_{\sqrt{3}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-x^2+2x} \log_{\frac{1}{3}}(2|x-a|+2) = 0$$

имеет ровно три корня.

11. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$\log_{\frac{1}{a}}(\sqrt{x^2 + ax + 5 + 1}) \log_5(x^2 + ax + 6) + \log_a 3 \geq 0$$

имеет единственное решение.

## Монотонность и метод интервалов

Здесь мы рассмотрим метод решения неравенств, представляющий собой некоторое усовершенствование метода интервалов. Именно, в задачах, где существенным является знак функции, можно заменять разность значений монотонных функций разностями значений их аргументов. Это позволяет решать довольно сложные неравенства сравнительно просто – методом интервалов, применяемым обычно к рациональным функциям.

Для обоснования указанной замены мы переформулируем определение возрастающей функции, приведенное в самом начале этой статьи. Надеемся, что доказательство эквивалентности этих определений не составит для вас особого труда.

*Функция  $y = f(x)$  возрастает (убывает) на промежутке  $I$  тогда и только тогда, когда для любых  $u$  и  $v$  из этого промежутка знаки чисел  $f(u) - f(v)$  и  $u - v$  совпадают (соответственно, противоположны).*

Это замечание позволяет в целом ряде задач, связанных с исследованием знака функций, заменить разность  $f(u) - f(v)$  на более простое выражение  $u - v$ .

Для решения конкретных задач полезно помнить, что знаки чисел  $a^2 - b^2$  и  $a - b$  при положительных  $a$  и  $b$  совпадают, а при отрицательных – противоположны (подумайте, что можно сказать, если знаки  $a$  и  $b$  противоположны, а также – если

рассматривать не квадраты, а любые положительные степени!). Одинаковы будут также знаки чисел  $2^u - 2^v$  и  $u - v$ ,  $\log_2 u - \log_2 v$  и  $u - v$ ,  $\operatorname{arctg} u - \operatorname{arctg} v$  и  $u - v$ , а вот знаки чисел  $\log_{0,5} u - \log_{0,5} v$  и  $u - v$  противоположны.

**Упражнение 12.** Докажите, что совпадают знаки следующих чисел:

- а)  $|u| - |v|$  и  $u^2 - v^2$ ;      б)  $\sqrt{u} - \sqrt{v}$  и  $u - v$ ;  
 в)  $a^u - a^v$  и  $(u - v)(a - 1)$ ;      г)  $\log_a u - \log_a v$  и  $(u - v)(a - 1)$ ;  
 д)  $a^x - b$  и  $(x - \log_a b)(a - 1)$ ;      е)  $\log_a x - b$  и  $(x - a^b)(a - 1)$ .

Рассмотрим теперь несколько примеров.

**Задача 15.** Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2-x} + 4x - 3}{x} \geq 2.$$

**Решение.** Область определения данного неравенства описывается системой

$$\begin{cases} x \leq 2, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Поскольку мы хотели бы применить метод интервалов, перенесем число 2 в левую часть неравенства, приведем ее к общему знаменателю:

$$\frac{\sqrt{2-x} + 2x - 3}{x} \geq 0. \quad (10)$$

Неравенство (10), очевидно, справедливо при  $x \geq \frac{3}{2}$ . При  $x < \frac{3}{2}$  запишем его так:

$$\frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{(3-x)^2}}{x} \geq 0. \quad (10^*)$$

В неравенстве (10\*) заменим разность корней разностью подкоренных выражений:

$$\frac{2-x-(3-x)^2}{x} \geq 0,$$

т.е.

$$\frac{4x^2 - 11x + 7}{x} \leq 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов, получаем ответ.

**Ответ:**  $x < 2$ ;  $1 \leq x < 2$ .

**Замечание.** Как это нередко бывает, для решения задачи методом интервалов мы могли использовать разные функции. Например, мы могли рассуждать так: разность положительных чисел  $\sqrt{2-x}$  и  $\sqrt{(3-2x)^2}$  имеет тот же знак, что и разность их квадратов, а дальше все аналогично.

Применение монотонности упрощает и решение следующей задачи.

**Задача 16.** Решите неравенство

$$\log_{|x|}(x+2) < 2.$$

**Решение.** Сначала находим допустимые значения:

$$\begin{cases} x+2 > 0, \\ |x| > 0, \\ |x| \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ x \neq 0, \\ x \neq \pm 1. \end{cases}$$

При этих значениях  $x$ , перенеся число 2 в левую часть, данное неравенство можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{cases} \log_{|x|}(x+2) - \log_{|x|} x^2 < 0, \\ x > -2; x \neq 0; x \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2-x^2)(|x|-1) < 0, \\ x > -2; x \neq 0; x \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2-x^2)(x^2-1) < 0, \\ x > -2; x \neq 0; x \neq \pm 1. \end{cases}$$

Первое преобразование выполнено в силу соотношений упражнения 12,г), а второе – упражнения 12,а) (применено только ко второй скобке). Осталось решить полученную систему.

**Ответ:**  $-2 < x < -1$ ;  $-1 < x < 0$ ;  $0 < x < 1$ ;  $x < 2$ .

В заключение рассмотрим еще один пример на неравенство с логарифмами. Здесь мы еще раз убедимся в том, насколько сокращает объем решения сведение к методу интервалов.

**Задача 17.** Решите неравенство

$$(\log_{3x-1}(2x) - 1)(\log_x(3-x) - 1) > 0.$$

**Решение.** Найдем область определения неравенства:  $\frac{1}{3} < x < 3$ ;  $x \neq \frac{2}{3}$ ;  $x \neq 1$ . В области определения знаки скобок левой части в силу упражнения 12,г) совпадают со знаками соответствующих выражений, что приводит к легко решаемой

системе:

$$\begin{cases} (1-x)(3x-2)(3-2x)(x-1) > 0, \\ \frac{1}{3} < x < 3; x \neq \frac{2}{3}; x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2(3x-2)(2x-3) > 0, \\ \frac{1}{3} < x < 3; x \neq \frac{2}{3}; x \neq 1. \end{cases}$$

**Ответ:**  $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}; \frac{3}{2} < x < 3.$

При решении следующего упражнения вам могут помочь результаты предыдущего.

**Упражнение 13.** Решите неравенства:

а)  $\frac{|x^2 - 2x| - 2x - 1}{x^2 - 2 + |x^2 + 3x|} \geq 0;$

б)  $\frac{\sqrt{-x^2 + 7x - 6}}{|x^2 - 6x + 5| - |x^2 - 2x - 3|} \leq 0;$

в)  $\frac{\sqrt{x^2 - 5} - 3}{|x + 4| - 7} \geq 1;$

г)  $\frac{16 - 3x + \sqrt{x^2 - 3x - 4}}{6 - x} \geq 1;$

д)  $\log_{x-2} x \leq \log_{x-2} 4;$

е)  $\log_x \left( \frac{1}{\log_4 \left( 3 \cdot 2^{\frac{1}{x}} + 4 \right)} \right) \leq 1;$

ж)  $\frac{\log_{21+4x-x^2} (7-x)}{\log_{x+3} (21+4x-x^2)} < \frac{1}{4}.$

## МЕТОД ЗАМЕНЫ МНОЖИТЕЛЕЙ

*В.Голубев*

### Основная идея метода

Метод интервалов подробно рассматривается в школьных учебниках и пособиях для поступающих и, как правило, легко усваивается. Поэтому естественным можно признать желание свести решение того или иного неравенства повышенной сложности к решению рациональных неравенств. Оказывается, достаточно широкий класс неравенств подобную попытку допускает.

Любое неравенство приводимо к виду

$$\frac{u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n}{v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_n} \vee 0, \quad (1)$$

где символ « $\vee$ » обозначает один из четырех возможных знаков неравенства:  $<$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ ,  $>$ .

Согласитесь, что при решении неравенства (1) нас интересует только знак любого множителя в числителе или знаменателе, а не абсолютная его величина. Поэтому, если по каким-либо причинам нам неудобно работать с данным множителем, мы можем заменить его на другой знакововпадающий с ним в области определения неравенства (и имеющий в этой области те же корни). Этот бесхитростный факт и определяет основную идею метода замены множителей.

Важно зафиксировать внимание читателя, что замена множителя осуществляется только (!) при условии приведения неравенства к виду (1), т.е. когда требуется сравнить произведение с нулем.

Монотонность – ключ к замене множителя

Основная часть замен обусловлена двумя следующими равносильными утверждениями.

**Утверждение 1.** *Функция  $f(x)$  есть строго (!) возрастающая тогда и только тогда, когда для любых двух значений  $t_1$  и  $t_2$  из области определения функции разность  $(t_1 - t_2)$  совпа-*

дает по знаку с разностью  $(f(t_1) - f(t_2))$ , т.е.

$$f \nearrow \Leftrightarrow \left( t_1 - t_2 \overset{\text{одз}}{\leftrightarrow} f(t_1) - f(t_2) \right),$$

где символ  $\leftrightarrow$  означает знакововпадение.

**Утверждение 2.** Функция  $f(x)$  есть строго (!) убывающая тогда и только тогда, когда для любых двух значений  $t_1$  и  $t_2$  из области определения функции разность  $(t_1 - t_2)$  совпадает по знаку с разностью  $(f(t_2) - f(t_1))$ , т.е.

$$f \searrow \Leftrightarrow \left( t_1 - t_2 \overset{\text{одз}}{\leftrightarrow} f(t_2) - f(t_1) \right).$$

Обоснование этих утверждений непосредственно следует из определения строго монотонной функции. Равносильность утверждений 1 и 2 следует из того факта, что если  $y = f(x)$  есть монотонно возрастающая функция, то  $y = -f(x)$  есть монотонно убывающая.

*Комментарий 1.* Практически, только замена знакопостоянных множителей не вытекает из утверждений 1 и 2. Поэтому, если нет желания трогать знак неравенства, всюду положительные множители просто убираем, а всюду отрицательные заменяем на  $(-1)$ . Популярный знакопостоянный множитель – квадратный трехчлен  $ax^2 + bx + c$  с отрицательным дискриминантом – удобно заменять на старший коэффициент (или на свободный член), т.е.

$$ax^2 + bx + c \leftrightarrow a \leftrightarrow c \quad (\text{при } D < 0).$$
 (2)

### Функция $y = t^n$ и определяемые ею замены

Поскольку функция  $y = t^n$  при  $n > 0$  является строго возрастающей на множестве неотрицательных чисел (а при нечетном натуральном  $n$  – на всей числовой оси), то в силу утверждения 1 справедливы замены:

$$t_1 - t_2 \leftrightarrow t_1^n - t_2^n \quad \text{при } n > 0, \quad t_1 \geq 0, \quad t_2 \geq 0, \quad (3.1)$$

$$t_1 - t_2 \leftrightarrow t_1^{2k-1} - t_2^{2k-1} \quad \text{при } k \text{ натуральном.} \quad (3.2)$$

Практически задачи конкурсных экзаменов содержат корни только второй или третьей степени, при этом подавляющая часть содержит корни только второй степени, работа с которыми и вызывает у школьников основные трудности. Поэтому и мы основное внимание уделяем работе с квадратными корнями,

полагая, что этого достаточно для безошибочной ориентации в других случаях.

Функции  $y = t^2$  и  $y = \sqrt{t}$ , рассматриваемые на множестве неотрицательных чисел, являются взаимнообратными и строго возрастающими, т.е.

$$t_1 \vee t_2 \Leftrightarrow t_1^2 \vee t_2^2 \Leftrightarrow \sqrt{t_1} \vee \sqrt{t_2}.$$

Поэтому

$$t_1 - t_2 \Leftrightarrow t_1^2 - t_2^2, \quad (3.3)$$

$$\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} \Leftrightarrow t_1 - t_2, \text{ где } t_1, t_2 \geq 0. \quad (3.4)$$

Так как  $|m| \geq 0$  и  $|m|^2 = m^2$  для любого  $m$ , то из (3.1) получаем, что

$$|t_1| - |t_2| \Leftrightarrow |t_1|^2 - |t_2|^2 \Leftrightarrow t_1^2 - t_2^2. \quad (3.5)$$

**Пример 1.** Решите неравенство

$$\frac{(|x-2| - 4 - x^2)(|x+4| - \sqrt{x^2 - x - 2})}{(|1-x| - 4)(|3+x| - |x-5|)} > 0.$$

**Решение** (подробное). Исходное неравенство имеет вид

$$\frac{u_1 \cdot u_2}{v_1 \cdot v_2} > 0.$$

Все множители  $u_1, u_2, v_1$  и  $v_2$  имеют вид  $t_1 - t_2$ , где  $t_1 \geq 0$  и  $t_2 \geq 0$ , поэтому в силу (3.3) мы эти множители заменяем на знаковоспадающие с ними множители вида  $t_1^2 - t_2^2$ :

$$\frac{(|x-2|^2 - (4+x^2)^2)(|x+4|^2 - (\sqrt{x^2 - x - 2})^2)}{(|1-x|^2 - 4^2)(|3+x|^2 - |x-5|^2)} > 0.$$

Так как  $|m|^2 = m^2$  и  $(\sqrt{x^2 - x - 2})^2 = x^2 - x - 2$ , то с учетом неотрицательности подкоренного выражения  $x^2 - x - 2$  получаем

$$\left\{ \frac{((x-2)^2 - (4+x^2)^2)((x+4)^2 - (x^2 - x - 2))}{((1-x)^2 - 4^2)((3+x)^2 - x(x-5)^2)} > 0, \Leftrightarrow \right. \\ \left. x^2 - x - 2 \geq 0 \right.$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-2-(4+x^2))(x-2+(4+x^2))(9x+18)}{(1-x-4)(1-x+4)(3+x-(x-5))(3+x+x-5)} > 0, \\ x \leq -1 \text{ или } x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9 \cdot (-x^2+x-6)(x^2+x+2)(x+2)}{16 \cdot (-x-3)(5-x)(x-1)} > 0, \\ x \leq -1 \text{ или } x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

(далее знакопостоянные ( $D < 0$ ) квадратные трехчлены  $(-x^2+x-6)$  и  $(x^2+x+2)$  согласно (2) заменяем на  $(-1)$  и  $1$  соответственно, остальные упрощения очевидны)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(-1) \cdot 1 \cdot (x+2)}{(x+3)(x-5)(x-1)} > 0, \\ x \leq -1 \text{ или } x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+2)}{(x+3)(x-5)(x-1)} < 0, \\ x \leq -1 \text{ или } x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < -2 \text{ или } 1 < x < 5, \\ x \leq -1 \text{ или } x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < -2 \\ 2 \leq x < 5. \end{cases}$$

**Ответ:**  $-3 < x < -2$ ;  $2 \leq x < 5$ .

Обратим внимание на две любопытные замены:

$$\sqrt{t} \overset{\text{одз}}{\Leftrightarrow} t, \quad (3.6)$$

$$\sqrt{f} + \sqrt{g} \overset{\text{одз}}{\Leftrightarrow} f + g. \quad (3.7)$$

Замена (3.6) очень удобна там, где приходится отслеживать область допустимых значений. Замена (3.7) суммы  $\sqrt{f} + \sqrt{g}$  при возможном одновременном равенстве нулю подкоренных выражений на сумму  $f + g$  позволяет учитывать эту возможность.

**Пример 2.** Решите неравенство

$$(x^2+x-6)\sqrt{x^2-2x-3} \geq 0.$$

**Решение.** Данное неравенство преобразуем так:

$$(x^2+x-6)\sqrt{x^2-2x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+x-6)(x^2-2x-3) \geq 0, \\ x^2-2x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x-2)(x+1)(x-3) \geq 0, \\ x \leq -1 \text{ или } x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x = -1 \\ x \geq 3. \end{cases}$$

**Ответ:**  $(-\infty; -3] \cup \{-1\} \cup [3; +\infty)$ .

### **Показательная и логарифмическая функции и вызываемые ими замены**

Показательная функция  $y = a^t$ , как известно, строго убывает при  $0 < a < 1$  и строго возрастает при  $a > 1$ . Поэтому, в частности, для  $a = 10$  получаем

$$10^{t_1} - 10^{t_2} \leftrightarrow t_1 - t_2.$$

Для произвольного основания  $a$ , пользуясь основным логарифмическим тождеством, можно увидеть, что

$$a^{t_1} - a^{t_2} = \left(10^{\lg a}\right)^{t_1} - \left(10^{\lg a}\right)^{t_2} = 10^{t_1 \lg a} - 10^{t_2 \lg a}.$$

Отсюда

$$a^{t_1} - a^{t_2} \leftrightarrow t_1 \lg a - t_2 \lg a,$$

т.е.

$$a^{t_1} - a^{t_2} \leftrightarrow (t_1 - t_2) \lg a. \quad (4)$$

Функция  $y = \lg x$  — строго возрастающая. Поэтому

$$x_1 - x_2 \overset{\text{одз}}{\leftrightarrow} \lg x_1 - \lg x_2.$$

Если  $x_1 = a$  и  $x_2 = 1$ , то получаем, что  $a - 1 \leftrightarrow \lg a - \lg 1$ , т.е.

$$\lg a \leftrightarrow a - 1. \quad (5)$$

Тогда соотношение (4) принимает вид

$$a^{t_1} - a^{t_2} \leftrightarrow (t_1 - t_2)(a - 1). \quad (5.1)$$

Таким образом, мы установили, что разность степеней с одним и тем же основанием всегда по знаку совпадает с произведением разности показателей этих степеней на разность основания и единицы.

Для логарифмической функции  $y = \log_a t$  аналогично устанавливаем, что

$$\log_a t_1 - \log_a t_2 = \frac{\lg t_1}{\lg a} - \frac{\lg t_2}{\lg a} = \frac{1}{\lg a} (\lg t_1 - \lg t_2).$$

Отсюда следует, что

$$\log_a t_1 - \log_a t_2 \leftrightarrow \frac{\lg t_1 - \lg t_2}{\lg a} \leftrightarrow \frac{t_1 - t_2}{a - 1}.$$

Иными словами разность логарифмов по одному и тому же основанию всегда по знаку совпадает с отношением разности подлогарифмических выражений к разности основания и

единицы:

$$\log_a t_1 - \log_a t_2 \leftrightarrow \frac{t_1 - t_2}{a - 1}. \quad (5.2)$$

**Замечание.** Утверждения (5.2) и (5.1) равносильны, поскольку показательная логарифмическая функции взаимнообратны.

Утверждения (5.1) и (5.2) позволяют исключительно эффективно решать очень многие неравенства, которые принято относить к разряду задач повышенной сложности. В частности, из (5.1) и (5.2) легко следуют полезные схемы решения основных показательных и логарифмических неравенств:

$$1) \ a^f > a^g \Leftrightarrow \begin{cases} (f - g)(a - 1) > 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$2) \ \begin{cases} a^f > b, \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (f - \log_a b)(a - 1) > 0,$$

$$3) \ \log_a f > \log_a g \Leftrightarrow \begin{cases} (f - g)(a - 1) > 0, \\ f > 0, \\ g > 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$4) \ \log_a f > b \Leftrightarrow \begin{cases} (f - a^b)(a - 1) > 0, \\ f > 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$5) \ \log_a f + \log_a g > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (fg - 1)(a - 1) > 0, \\ f > 0, \\ g > 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$6) \ \frac{a^{f_1} - a^{f_2}}{a^{g_1} - a^{g_2}} > 0 \Leftrightarrow \frac{f_1 - g_1}{f_2 - g_2} > 0$$

и так далее.

**Пример 3.** Решите неравенство

$$\frac{(8 - x^3)(2^x - 1)(\sqrt{x + 20} - \sqrt{2x + 30})(|x - 2| - 4 - x^2)}{(|x|^{2x-1} - |x|^{5-x})(\log_{x+20}(12 - |x|) - \log_{x+20}(20 - 2|x|))\log_5^3 x^2} < 0.$$

**Решение** (подробное). Первый множитель в числителе  $(8 - x^3)$  имеет вид  $(t_1^{2k-1} - t_2^{2k-1})$  ( $k = 2$ ), который знакововпадает с разностью  $(t_1 - t_2)$ . Поэтому  $(8 - x^3)$  заменяем на  $(2 - x)$ .

Множитель  $(2^x - 1)$  имеет вид  $a^{t_1} - a^{t_2}$ , где  $a = 2$ ,  $t_1 = x$ ,  $t_2 = 0$ , который знакововпадает с  $(t_1 - t_2)(a - 1)$ . Поэтому множитель  $2^x - 1$  заменяем на  $x$ .

Множитель  $(\sqrt{x+20} - \sqrt{2x+30})$  имеет вид  $(\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2})$ , который знакововпадает с  $(t_1 - t_2)$ . Поэтому его заменяем на  $((x+20) - (2x+30))$ .

Множитель  $(|x-2| - 4 - x^2)$  имеет вид  $(t_1 - t_2)$ , где  $t_1 \geq 0$  и  $t_2 = x^2 + 4 \geq 0$ . Поэтому  $(t_1 - t_2)$  знакововпадает с  $t_1^2 - t_2^2$ . И так как  $|x-2|^2 = (x-2)^2$ , то указанный множитель заменяем на  $((x-2)^2 - (x^2+4)^2)$ .

В знаменателе первый множитель  $(|x|^{2x-1} - |x|^{5-x})$  имеет вид  $a^{t_1} - a^{t_2}$ , который знакововпадает с  $(t_1 - t_2)(a - 1)$ . Поэтому этот множитель знакововпадает с произведением  $((2x-1) - (5 - (5-x)))(|x|-1)$ . И так как  $(|x|-1)$  знакововпадает с  $(|x|^2 - 1) = x^2 - 1$ , то окончательно получаем, что первый множитель можно заменить на  $((2x-1)(5-x))(x^2-1)$ .

Второй множитель в знаменателе имеет вид  $\log_a t_1 - \log_a t_2$ , который знакововпадает с произведением  $(t_1 - t_2)(a - 1)$ . Поэтому сначала этот множитель заменяем на

$$((12 - |x|) - (20 - |x|))(x + 20 - 1) = (|x| - 8)(x + 19).$$

И так как  $|x| - 8$  знакововпадает с  $x^2 - 8^2$ , то второй множитель в знаменателе заменяем на  $(x-8)(x+8)(x+19)$ .

Последний множитель  $\log_5^3 x^2$  имеет вид  $a^3$ , который знакововпадает с  $a$ . И так как  $a = \log_5 x^2$ , имея вид  $\log_5 t_1 - \log_5 t_2$  ( $t_1 = x^2$ ,  $t_2 = 1$ ), знакововпадает с  $(x^2 - 1)$ , то последний множитель заменяем на  $(x^2 - 1)$ .

Окончательно после всех замен устанавливаем, что исходное неравенство в своей области определения равносильно неравен-

ству

$$\frac{(2-x)x(-x-10)(x-2-(x^2+4))(x-2+x^2+4)}{(3x-6)(x-1)(x+1)(x-8)(x+19)(x^2-1)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2-x)x(-x-10)(-x^2+x-6)(x^2+x+2)}{3(x-2)(x-1)^2(x+1)^2(x-8)(x+8)(x+19)} < 0. \quad (6)$$

Очевидно, что область определения левой части исходного неравенства задается системой

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ 20 - 2|x| > 0, \end{cases}$$

т.е. область одновременного существования всех множителей представляет собой два промежутка:  $-10 < x < 0$  и  $0 < x < 10$ . В этой области множители  $(-x-10)$  и  $(x+19)$  знакопостоянны, и поэтому их можно заменить на  $(-1)$  и  $1$  соответственно. Знакопостоянны в области определения и квадратные трехчлены  $(-x^2+x-6)$  и  $(x^2+x+2)$ . Поэтому, заменяя их на  $(-1)$  и  $1$ , устанавливаем методом интервалов, что

$$(6) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(-1) \cdot (x-2)x(-1) \cdot (-1)}{3(x-2)(x-1)^2(x+1)^2(x-8)(x+8)} < 0, \\ -10 < x < 0 \text{ или } 0 < x < 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8 < x < -1 \\ -1 < x < 0 \\ 8 < x < 10. \end{cases}$$

**Ответ:**  $(-8; 0) \cup (-1; 0) \cup (8; 10)$ .

### Демонстрация решений неравенств без обоснования

$$1. \quad (4x^2 + 2x + 1)^{x^2-x} > 1 \Leftrightarrow (x^2 - x)((4x^2 + x + 1) - 1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-1)(2x+1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -0,5) \cup (1; +\infty).$$

$$2. \quad (x^2 + x + 1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq (x^2 + x + 1)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+5}{x+2} - 3\right)((x^2 + x + 1) - 1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(-2x-1)x(x+1)}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-2; -1] \cup [-0.5; 0].$$

$$3. 1 < 3^{|x^2-x|} < 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < |x^2 - x| < 2 \Leftrightarrow |x^2 - x| \cdot (|x^2 - x| - 2) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x)^2 ((x^2 - x) - 2)(x^2 - x + 2) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-1)^2(x+1)(x-2) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2).$$

$$4. \log_{x^2}(3-2x) > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(3-2x)-x^2}{x^2-1} > 0, \\ 3-2x > 0, \\ x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} > 0, \\ x < \frac{3}{2}, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x < -1.$$

$$5. \log_x \log_2(4^x - 12) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\log_2(4^x - 12) - x)(x - 1) \leq 0, \\ \log_2(4^x - 12) > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4^x - 12 - 2^x)(x - 1) \leq 0, \\ 4^x - 12 - 1 > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2^{2x} - 2^x - 12)(x - 1) \leq 0, \\ x > \log_2 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2^x + 3)(2^x - 4)(x - 1) \leq 0, \\ x > \log_4 13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2^x - 2^2)(x - 1) \leq 0, \\ x > \log_4 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)(x - 1) \leq 0, \\ x > \log_4 13 \end{cases} \Leftrightarrow \log_4 13 < x \leq 2.$$

$$6. (2^x + 3 \cdot 2^{-x})^{2 \log_2 x - \log_2(x+6)} > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(2^x + 3 \frac{1}{2^x}\right)^{\log_2 \frac{x}{x+6}} > 1, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 \frac{x^2}{x+6} \left(2^x + \frac{3}{2^x} - 1\right) > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - (x + 6))(2^{2x} - 2^x + 3) > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3)(x + 2) > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

### Базовая информация по методу замены множителей

Итак, вкратце изложим основные результаты.

I. *Стандартный вид неравенств*, когда применяется метод замены множителей?

$$\frac{u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n}{v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_k} \vee 0,$$

где символ « $\vee$ » обозначает один из четырех возможных знаков неравенства:  $<$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ ,  $>$ .

II. *Основная идея метода замены множителей* состоит в замене любого множителя в числителе или знаменателе на знаковосовпадающий с ним и имеющий одни и те же корни.

*Замечание.* Преобразованное таким образом неравенство всегда равносильно исходному в области существования последнего.

*Предупреждение.* Указанная замена возможна только тогда, когда неравенство приведено к стандартному виду.

III. *Две основные замены.*

$$(t_1 - t_2) \leftrightarrow (f(t_1) - f(t_2)),$$

если  $f(t)$  – строго возрастающая функция;

$$(t_1 - t_2) \leftrightarrow (f(t_2) - f(t_1)),$$

если  $f(t)$  – строго убывающая функция.

IV. *Наиболее часто встречающиеся замены* (без учета области допустимых значений):

$$1) |t| \leftrightarrow t^2;$$

$$2) |t_1| - |t_2| \leftrightarrow t_1^2 - t_2^2;$$

$$3) at^2 + bt + c \leftrightarrow a \text{ при } D = b^2 - 4ac < 0;$$

$$4) \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} \leftrightarrow t_1 - t_2;$$

$$5) t_1 - \sqrt{t_2} \leftrightarrow t_1^2 - t_2;$$

$$6) |t| - (at^2 + bt + c) \leftrightarrow t^2 - (at^2 + bt + c)^2 \text{ при } D = b^2 - 4ac \leq 0;$$

$$7) a^{t_1} - a^{t_2} \leftrightarrow (t_1 - t_2)(a - 1);$$

$$8) a^t - 1 \leftrightarrow t(a - 1);$$

$$9) f - g \leftrightarrow f^2 - g^2 \text{ при } f \geq 0 \text{ и } g \geq 0;$$

$$10) \log_a f \leftrightarrow (f - 1)(a - 1);$$

$$11) \log_a f - g \leftrightarrow (f - a^g)(a - 1);$$

$$12) \log_a f - \log_a g \leftrightarrow (f - g)(a - 1).$$



## О МОДУЛЕ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

*В.Голубев*

Здесь мы обсудим две знаменитые задачи, которые в свое время «потрясли» абитуриентов двух ведущих факультетов МГУ им.М.В.Ломоносова.

### Формулировка задач

**Задача 1** (факультет вычислительной математики и кибернетики, 1986 г.). *Найдите значения  $c$  и  $d$ , при которых наибольшее значение функции*

$$y(x) = \left| 4 \frac{3^x + 3^{-x} - 2}{3^x + 3^{-x} + 2} + 2(c + 2d) \frac{3^x - 1}{3^x + 1} + 2c + d \right|$$

*на отрезке  $[-1; 1]$  является наименьшим.*

(Ответ:  $c = -\frac{1}{3}$ ,  $d = \frac{1}{6}$ .)

**Задача 2** (механико-математический факультет, 1991 г.). *Найдите все пары чисел  $p$  и  $q$ , при которых неравенство*

$$|x^2 + px + q| > 2$$

*не имеет решений на отрезке  $[1; 5]$ .*

(Ответ:  $p = -6$ ,  $q = 7$ .)

Первая естественная реакция абитуриента, впервые столкнувшегося с первой задачей, — ввести переменную  $u = 3^x$  и взглянуть на функцию  $y(u)$ .

Посмотрим и мы:

$$\begin{aligned} y(u) &= \left| 4 \frac{u + \frac{1}{u} - 2}{u + \frac{1}{u} + 2} + 2(c + 2d) \frac{u - 1}{u + 1} + 2c + d \right| = \\ &= \left| 4 \frac{u^2 - 2u + 1}{u^2 + 2u + 1} + 2(c + 2d) \frac{u - 1}{u + 1} + 2c + d \right| = \end{aligned}$$

$$= \left| 4 \frac{(u-1)^2}{(u+1)^2} + 2(c+2d) \frac{(u-1)}{(u+1)} + 2c + d \right|.$$

Дойдя до этого момента, абитуриент обнаруживает, что эффективнее было бы сразу же ввести переменную  $t = 2 \frac{3^x - 1}{3^x + 1}$ . Тогда выражение для рассматриваемой функции принимает вид

$$y(t) = |t^2 + (c + 2d)t + 2c + d|.$$

Теперь выясним, в каких пределах изменяется переменная  $t$  как функция от  $x$  на отрезке  $[-1; 1]$ . Поскольку

$$t(x) = 2 \frac{3^x - 1}{3^x + 1} = 2 \frac{(3^x + 1) - 2}{3^x + 1} = 2 \frac{(3^x + 1) - 2}{3^x + 1} = 2 \left( 1 - \frac{2}{3^x + 1} \right),$$

видно, что функция  $t(x)$  монотонно возрастает, и, следовательно, при  $x \in [-1; 1]$  значения переменной  $t$  принадлежат отрезку  $[t(-1); t(1)]$ , т.е. отрезку  $[-1; 1]$ .

Таким образом, получаем задачу, которую в общем виде можно сформулировать так.

**Задача 3.** Найдите значения  $p$  и  $q$ , при которых наибольшее значение функции

$$y(t) = |t^2 + pt + q|$$

на отрезке  $[m; n]$  является наименьшим.

(Ответ:  $p = -(m + n)$ ,  $q = \frac{1}{8}(m^2 + 6mn + n^2)$ .)

Оказывается, что к задаче 3 сводится и задача 2, если ее переформулировать следующим образом.

**Задача 2'** (равносильная задаче 2). Найдите все пары чисел  $p$  и  $q$ , при которых неравенство

$$|x^2 + px + q| \leq 2$$

выполняется для всех значений  $x$  из отрезка  $[1; 5]$ .

(Ответ:  $p = -6$ ,  $q = 7$ .)

Существует несколько различных способов решения сформулированных задач. Рассмотрим первый способ, при котором требуются минимальные познания о поведении квадратного трехчлена на отрезке.

## Область значений квадратного трехчлена на отрезке

Сначала напомним некоторые хорошо известные свойства квадратичной функции.

**Утверждение 1.** Все графики квадратичных функций  $y = t^2 + pt + q$  как гомотетические фигуры равны между собой и получаются друг из друга параллельным переносом (т.е. вид графика от параметров  $p$  и  $q$  не зависит).

**Утверждение 2.** Множество значений квадратичной функции  $y = t^2 + pt + q$  на отрезке  $[m; n]$  есть отрезок, длина которого не зависит от  $q$  (так как вычисляется как разность значений функции в некоторых двух точках).

**Утверждение 3.** Минимальная длина отрезка, являющегося множеством значений квадратичной функции, достигается тогда и только тогда, когда ось графика этой функции (т.е. ось параболы) проходит через середину отрезка  $[m; n]$ .

Первое утверждение непосредственно доказывается в школьном курсе алгебры при изучении квадратичной функции с помощью выделения полного квадрата, т.е. использования тождества

$$t^2 + pt + q = \left(t + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = (t - t_0)^2 - \frac{p^2}{4} + q.$$

Из этого равенства следует, что максимальное значение квадратного трехчлена на отрезке равно значению в той точке отрезка, которая наиболее удалена от вершины параболы с абсциссой  $t_0 = -\frac{p}{2}$  (это один из концов отрезка). Аналогично, минимальное значение равно значению в ближайшей к вершине точке отрезка (в зависимости от того, вне или внутри отрезка расположена вершина, это либо конец отрезка, либо сама вершина параболы). А так как длина отрезка множества значений квадратичной функции  $y = t^2 + pt + q$  на  $[m; n]$  — будем в дальнейшем эту длину обозначать  $L_y(m; n)$  — есть не что иное, как разность между максимальным и минимальным значениями этой функции, то получаем следующий вариант утверждения 2.

**Утверждение 2'.** Если  $-\frac{p}{2} \leq m$ , то

$$L_y(m; n) = y(n) - y(m) = (n - m)(n + m + p) = l(m + n + p),$$

где  $l = n - m$  есть длина отрезка  $[m; n]$ ; если  $m \leq -\frac{p}{2} \leq \frac{m+n}{2}$ ,

то

$$L_y(m; n) = y(n) - y\left(-\frac{p}{2}\right) = \left(n + \frac{p}{2}\right)^2;$$

если  $\frac{m+n}{2} \leq -\frac{p}{2} \leq n$ , то

$$L_y(m; n) = y(m) - y\left(-\frac{p}{2}\right) = \left(m + \frac{p}{2}\right)^2;$$

если  $n \leq -\frac{p}{2}$ , то

$$L_y(m; n) = y(m) - y(n) = -(n-m)(m+n+p) = -l(m+n+p).$$

Величину  $L_y(m; n)$  принято называть *колебанием функции на отрезке*. Утверждение 2' фактически определяет колебание квадратичной функции  $y = t^2 + pt + q$  на отрезке  $[m; n]$  в зависимости от параметра  $p$ :

$$L_y(m; n) = \varphi(p) = \begin{cases} -l(m+n+p), & \text{если } p \leq -2n, \\ \left(m + \frac{p}{2}\right)^2, & \text{если } -2n \leq p \leq -m-n, \\ \left(n + \frac{p}{2}\right)^2, & \text{если } -m-n \leq p \leq -2m, \\ l(m+n+p), & \text{если } -2m \leq p. \end{cases}$$

Поскольку  $t_b = -\frac{p}{2}$ , т.е.  $p = -2t_b$ , то удобно взглянуть на колебание квадратичной функции в зависимости от  $t_b$ :

$$L_y(m; n) = \varphi(t_b) = \begin{cases} 2l\left(\frac{m+n}{2} - t_b\right), & \text{если } t_b \leq m, \\ (n - t_b)^2, & \text{если } m \leq t_b \leq \frac{m+n}{2}, \\ (m - t_b)^2, & \text{если } \frac{m+n}{2} \leq t_b \leq n, \\ 2l\left(t_b - \frac{m+n}{2}\right), & \text{если } n \leq t_b. \end{cases}$$

Отсюда следует, что колебание квадратичной функции монотонно убывает при приближении абсциссы вершины параболы к середине отрезка и достигает своего наименьшего значения (равного квадрату половины длины отрезка) в самой середине.

Итак,

$$\min_y L_y(m; n) = \left( \frac{n-m}{2} \right)^2.$$

Тем самым, утверждение 3 доказано.

Последнее равенство можно представить и в таком виде:

$$\min_{p,q} L_{t^2+pt+q}(m; n) = \frac{l^2}{4}, \quad (1)$$

где  $l$  — длина отрезка  $[m; n]$ . А тогда справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 4.** Когда аргумент квадратного трехчлена  $t^2 + pt + q$  пробегает отрезок длины  $l$ , его значения пробегает отрезок длины не меньшей  $l^2/4$ .

### Решение задачи 3

Пусть  $M$  — наибольшее значение функции  $y(t) = |t^2 + pt + q|$  на отрезке  $[m; n]$ . Тогда для любого значения  $t$  из отрезка  $[m; n]$  выполняется двойное неравенство

$$-M \leq t^2 + pt + q \leq M,$$

из которого следует, что значение квадратного трехчлена  $t^2 + pt + q$  пробегает отрезок длиной не больше  $2M$ . Поэтому в силу утверждения 4 получаем оценку

$$2M \geq \frac{l^2}{4} = \frac{(n-m)^2}{4}, \text{ т.е. } M \geq \frac{l^2}{8}.$$

Мы уже знаем, что равенство в последнем выражении достигается, если абсцисса вершины параболы совпадает с серединой отрезка, а значения квадратного трехчлена на концах отрезка равны  $M$  (и противоположны значению квадратного трехчлена в середине отрезка)<sup>1</sup>. Таким образом, искомые в задаче 3 значения параметров находятся из условий

$$\begin{cases} -\frac{p}{2} = \frac{m+n}{2}, \\ y\left(\frac{m+n}{2}\right) = -\frac{(n-m)^2}{8}. \end{cases}$$

---

<sup>1</sup> Это и есть три точки (концы отрезка и его середина), которые лежат в основе метода трех точек, описанного ниже.

Отсюда

$$\begin{cases} p = -(m+n), \\ \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 + p\left(\frac{m+n}{2}\right) + q = -\frac{(n-m)^2}{8} \Leftrightarrow \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -(m+n), \\ q = \frac{m^2 + 6mn + n^2}{8}, \end{cases}$$

что дает ответ задачи 3.

Для получения ответа задачи 1 осталось решить систему

$$\begin{cases} c + 2d = -(m+n), \\ 2c + d = \frac{m^2 + 6mn + n^2}{8}, \end{cases} \quad \text{где } m = -1, n = 1.$$

Внимательный читатель должен заметить, что мы доказали следующее свойство модуля квадратного трехчлена.

**Утверждение 5.** Когда аргумент квадратного трехчлена  $t^2 + pt + q$  пробегает отрезок длины  $l$ , значение модуля квадратного трехчлена пробегает отрезок длины не меньшей  $l^2/8$ , т.е.

$$\min_{p,q} L_{|t^2+pt+q|}(m;n) = \frac{l^2}{8}. \quad (2)$$

Ситуации, когда реализуются равенства (1) и (2), прекрасно видны на рисунках 1 и 2 соответственно.

### Упражнения

1. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых для всех  $x$  из промежутка  $m \leq x \leq n$  выполняется условие  $|ax^2 + bx + c| \leq M$  хотя бы для одной пары чисел  $b$  и  $c$ .

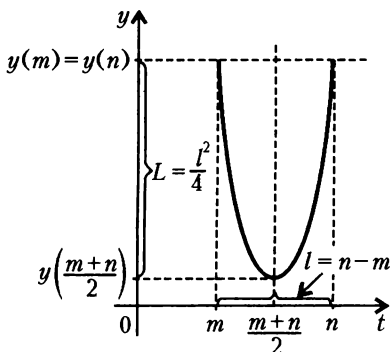


Рис. 1

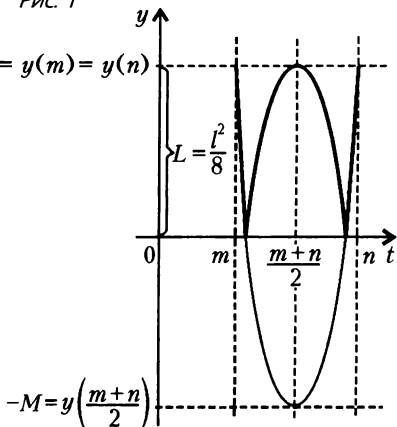


Рис. 2

**2** (Институт стран Азии и Африки МГУ, 2003 г.). Функция  $y(x) = x^2 + 2(c-d)x + 3c-d$  такова, что  $y(1)y(-1) \leq 0$  и  $|c-d| \geq 1$ . Найдите значения  $c$  и  $d$ , при которых множество значений функции  $f(x) = |y(x)|$  на отрезке  $[-1; 1]$  будет наименьшим; укажите это множество.

**3.** Найдите значения параметров  $a$  и  $b$ , при которых максимальное значение выражения  $\|x+a|+b\|$  на промежутке  $m \leq x \leq n$  будет наименьшим.

**4.** Докажите следующие свойства произвольного квадратного трехчлена:

$$a) \min_{b,c} \left( \max_{m \leq t \leq n} (at^2 + bt + c) - \min_{m \leq t \leq n} (at^2 + bt + c) \right) = |a| \frac{(n-m)^2}{4},$$

$$\text{т.е. } \min_{b,c} L_{at^2+bt+c}(m;n) = |a| \frac{l^2}{4};$$

$$б) \min_{b,c} L_{|at^2+bt+c|}(m;n) = |a| \frac{l^2}{8}.$$

### Метод трех точек

Перейдем теперь к рассмотрению другого способа решения задач подобного рода. Решим задачу 2' методом трех точек.

Поскольку исходное неравенство справедливо на всем отрезке  $[1; 5]$ , то, в частности, оно верно на его концах и в середине. Поэтому

$$\begin{cases} |1^2 + p \cdot 1 + q| \leq 2, \\ |3^2 + p \cdot 3 + q| \leq 2, \\ |5^2 + p \cdot 5 + q| \leq 2. \end{cases}$$

Решаем полученную систему относительно переменной  $q$  (в этом вся «соль» при анализе подобных линейных систем):

$$\begin{cases} (-p-1) - 2 \leq q \leq (-p-1) + 2, \\ (-3p-9) - 2 \leq q \leq (-3p-9) + 2, \\ (-5p-25) - 2 \leq q \leq (-5p-25) + 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -p-3 \leq q \leq -p+1, \\ -3p-11 \leq q \leq -3p-7, \\ -5p-27 \leq q \leq -5p-23. \end{cases}$$

Для искомых пар чисел  $p$  и  $q$  последняя система должна иметь хотя бы одно решение относительно  $q$ . Каждая строчка этой системы задает отрезок на числовой прямой переменной  $q$ . И так как три отрезка имеют общую точку тогда и только тогда, когда любой левый конец отрезков находится *не правее* любого правого

конца отрезков, то разрешимость нашей системы относительно  $q$  равносильна разрешимости относительно  $p$  следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} -p - 3 \leq -3p - 7, \\ -p - 3 \leq -5p - 23, \\ -3p - 11 \leq -p + 1, \\ -3p - 11 \leq -5p - 23, \\ -5p - 27 \leq -p + 1, \\ -5p - 27 \leq -3p - 7. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим единственное значение  $p = -6$ . Подставляя  $p = -6$  в предыдущую систему, найдем, что  $q = 7$ .

Таким образом, три точки отрезка (два конца и его середина) выдвинули кандидатом в ответ единственную пару чисел  $p$  и  $q$ .

Очевидно, что при  $p = -6$  и  $q = 7$  неравенство  $|x^2 + px + q| \leq 2$  выполняется при всех  $x$  на отрезке  $[1; 5]$ .

*Замечание 1.* У читателя может возникнуть вопрос, почему данные три точки (концы отрезка и его середина) были выбраны для отбора в кандидаты пары чисел  $p$  и  $q$ . Ответ следует из решения задачи 3, в котором было показано, что при минимальном колебании квадратного трехчлена на отрезке своих наибольшего и наименьшего значений он достигает как раз на концах отрезка и в его середине (при этом либо  $\max y = y(m) = y(n)$  и

$$\min y = y\left(\frac{m+n}{2}\right), \text{ либо } \min y = y(m) = y(n) \text{ и } \max y = y\left(\frac{m+n}{2}\right), \text{ где } y = at^2 + bt + c, a \neq 0).$$

*Замечание 2.* Нельзя не обратить внимание читателя на некоторое утверждение, использованное нами при решении задачи 2'. Сформулируем его в виде следующей теоремы.

**Теорема о пересекающихся отрезках.** Любые  $k$  отрезков имеют хотя бы одну общую точку тогда и только тогда, когда любые два из них имеют общую точку.

Предоставляем читателю самостоятельно найти доказательство этой теоремы.

### Упражнения

5 (ЛГУ, 1973 г.). Выберите число  $b$  так, чтобы наибольшее значение функции  $y(x) = |-2x^2 + x + b|$  на промежутке  $0 \leq x \leq 1$  было наименьшим.



**6** (МИЭМ, 1984 г.). Докажите, что при  $a = -12$  и  $b = 17$  наибольшее значение выражения  $|2x^2 + ax + b|$  на отрезке  $2 \leq x \leq 4$  равно 1. Верно ли обратное утверждение?

**7** (факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, 1989 г.). Докажите, что для любых  $p$  и  $q$  сумма длин отрезков, на которых выполняется неравенство  $|x^2 + px + q| \leq 2$ , не превышает 4.

**8** (ЗФТШ при МФТИ, вступительное задание на 1991/92 учебный год). Какое наибольшее значение может принимать параметр  $a$ , если известно, что  $|ax^2 - ax + 1| \leq 1$  при  $0 \leq x \leq 1$ ?

**9.** Какое максимальное значение может принимать сумма длин отрезков, на которых для любых  $p$  и  $q$  выполняется условие  $|x^2 + px + q| \leq M$ ?

**10.** Найдите все значения параметра  $p$ , при которых существует хотя бы одно значение параметра  $q$  такое, что все значения квадратного трехчлена  $x^2 + px + q$  на отрезке  $m \leq x \leq n$  принадлежат отрезку  $[M_1; M_2]$ .

## ЧЕТВЕРТЫЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

А.Егоров

Какой такой «четвертый признак»? Их всего три. Это любому школьнику известно, начиная с 7 класса! Так скажет почти любой наш читатель и будет прав. Никакого четвертого признака в природе нет. Однако...

Начнем с задачи.

**Задача 1.** Равны ли два треугольника  $ABC$  и  $A'B'C'$ , если известно, что  $\angle A = \angle A'$ ,  $AB = A'B'$  и  $BC = B'C'$  (рис.1)?

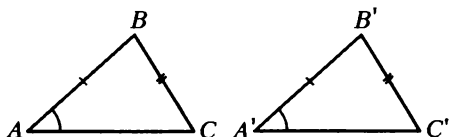


Рис. 1

**Решение.** *Первый способ.* Попробуем наложить треугольник  $A'B'C'$  на треугольник  $ABC$ . Для этого совместим стороны  $AB$  и  $A'B'$  так, чтобы лучи  $AC$  и  $A'C'$  совпали (рис.2). Куда при этом попадет вершина  $C'$ ? Легко понять (из равенства  $BC = B'C'$ ), что на прямой  $AC$  имеются, вообще говоря, две точки  $C$  и  $\tilde{C}$  такие, что  $BC = B\tilde{C} = B'C'$ .

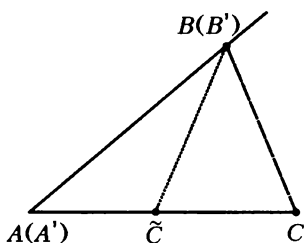


Рис. 2

*Второй способ.* Пусть  $\angle A = \angle A' = \alpha$ ,  $AB = A'B' = a$ . По теореме синусов радиус  $R$  окружности,

описанной около треугольника  $ABC$ , равен  $R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$ .

Аналогично, радиус  $R'$  окружности, описанной около треугольника  $A'B'C'$ , равен  $R' = \frac{a}{2 \sin \alpha}$ . Следовательно,  $R = R'$ .

Отсюда получается, что  $AB = 2R \sin \angle C$ ,  $A'B' = 2R \sin \angle C'$ . Поэтому  $\sin \angle C = \sin \angle C'$ . Но тогда есть две возможности:

- 1)  $\angle C = \angle C'$ , т.е. треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$  равны;
- 2)  $\angle C + \angle C' = 180^\circ$ .

Итак, при выполнении условий задачи 1 треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$  либо равны, либо не равны, но тогда  $\angle C + \angle C' = 180^\circ$ .

Это утверждение мы и будем называть, допуская некоторую вольность речи, «четвертым признаком» равенства треугольников. Иногда, если есть дополнительная информация о сторонах и углах, это действительно признак равенства треугольников.

**Упражнение 1.** Докажите, что а) если  $\angle A = \angle A' \geq 90^\circ$ ; б) если  $BC = B'C' > AB$ , то треугольники из задачи 1 равны.

Теперь посмотрим, как наш четвертый признак помогает решать задачи.

**Задача 2.** В неравнобедренном треугольнике  $ABC$  биссектрисы  $AA_1$  и  $BB_1$  пересекаются в точке  $I$ . Найдите угол  $C$ , если  $A_1I = B_1I$ .

**Решение.** Рассмотрим треугольники  $B_1IC$  и  $A_1IC$  (рис.3). В них  $\angle B_1CI = \angle A_1CI$ , сторона  $CI$  общая, а  $IB_1 = IA_1$ . По

доказанному ранее, есть две возможности: 1) треугольники равны; 2) треугольники не равны, но  $\angle CB_1I + \angle CA_1I = 180^\circ$ .

Обозначим, как обычно,  $\angle A$  через  $\alpha$ ,  $\angle B$  — через  $\beta$ ,  $\angle C$  — через  $\gamma$ .

В первом случае  $\angle CB_1I = \angle CA_1I$ . Но тогда  $\angle CB_1I$

Рис. 3

как внешний по отношению к треугольнику  $ABB_1$  равен  $\alpha + \frac{\beta}{2}$ ,

аналогично,  $\angle CA_1I = \beta + \frac{\alpha}{2}$ . Получаем  $\alpha + \frac{\beta}{2} = \beta + \frac{\alpha}{2}$ , или, следовательно,  $\alpha = \beta$ , т.е. треугольник  $ABC$  — равнобедренный, что

противоречит условию.

Следовательно, имеет место второй случай. Для него

$$\angle CB_1I + \angle CA_1I = 180^\circ.$$

Но тогда и  $\gamma + \angle B_1IA_1 = 180^\circ$ . Попутно, хотя сейчас это и не понадобится, заметим, что около четырехугольника  $A_1CB_1I$  можно описать окружность (рис.4).

Сделаем еще одно очень полезное

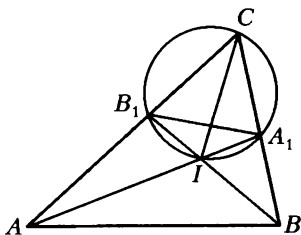


Рис. 4

замечание:  $\angle B_1IA_1 = \frac{180^\circ + \gamma}{2}$ . В самом деле,

$$\angle A_1IB_1 = \angle AIB = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \gamma}{2} = \frac{180^\circ + \gamma}{2}.$$

Рекомендуем запомнить последнюю формулу, справедливую во всех случаях.

Таким образом,

$$180^\circ - \gamma = \frac{180^\circ + \gamma}{2},$$

т.е.  $\angle C = \gamma = 60^\circ$ .

**Задача 3.** Пусть в обозначениях предыдущей задачи  $\angle C = 60^\circ$ . Докажите, что  $A_1I = B_1I$ , и найдите угол  $\angle A_1B_1I$ .

**Решение.** Если  $\gamma = 60^\circ$ , то  $\angle B_1IA_1 = \frac{180^\circ + \gamma}{2} = 120^\circ$  и четырехугольник  $A_1CB_1I$  вписанный (см. рис.4). Но тогда хорды  $A_1I$  и  $B_1I$  равны, так как  $\angle B_1CI = \angle A_1CI$ , а  $\angle IA_1B_1 = \angle ICB_1 = 30^\circ$ .

**Задача 4.** Биссектрисы внешних углов при вершинах  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $O$ , причем  $AO = BO$  (это центр вневписанной окружности  $ABC$ , касающейся продолжений сторон  $CA$  и  $CB$  и стороны  $AB$ ; рис.5). Найдите  $AC$ , если  $\angle ABC = \beta$ , а радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , равен  $R$ .

**Решение.** В треугольниках  $CAO$  и  $CBO$  равны стороны  $AO$  и  $BO$ , а  $CO$  — общая. Поэтому либо  $\angle CAO = \angle CBO$ , но тогда  $AC = BC$  и треугольник  $ABC$  равнобедренный, либо сумма этих углов, а значит и углов  $ACB$  и  $AOB$ , равна  $180^\circ$ . Последнее невозможно, так как по условию  $\angle OAB = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$ ,  $\angle OBA = \frac{180^\circ - \beta}{2}$ , а потому

$$\angle AOB = 180^\circ - (\angle OAB + \angle ABO) = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{180^\circ - \gamma}{2}$$

и

$$\frac{180^\circ - \gamma}{2} + \gamma = \frac{180^\circ + \gamma}{2} < 180^\circ.$$

Итак, треугольник  $ABC$  равнобедренный ( $AC = BC$ ), и

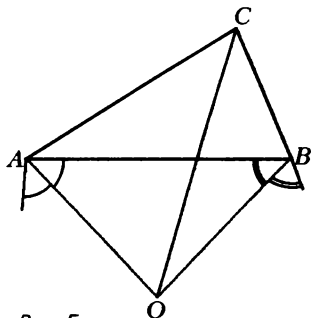


Рис. 5

сторона  $AC$  по теореме синусов равна

$$AC = 2R \sin \beta.$$

### Упражнения

2. Пусть  $I$  – центр вписанной в треугольник  $ABC$  окружности, а  $O$  – центр описанной окружности. Докажите, что описанная окружность пересекает отрезок  $IO$  в его середине.

3. Что можно сказать о треугольнике  $ABC$ , если биссектрисы его углов  $A$  и  $B$  образуют равные углы со сторонами  $BC$  и  $AC$  соответственно?

**Задача 5** (экономический факультет МГУ, 1985 г.). В треугольнике  $ABC$  заданы длины двух сторон:  $BC = 4$ ,  $AB = 2\sqrt{19}$ . Кроме того, известно, что центр окружности, проведенной через середины сторон треугольника, лежит на биссектрисе угла  $C$ . Найдите  $AC$ .

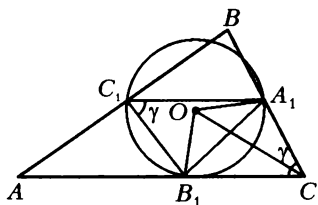


Рис. 6

**Решение.** Пусть  $O$  – центр окружности, проходящей через точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  – середины сторон треугольника  $ABC$  (рис. 6). Применим к треугольникам  $OCB_1$  и  $OCA_1$  четвертый признак равенства.

Если эти треугольники равны, то  $A_1C = CB_1$  и  $BC = AC = 4$ . Но тогда  $BC + AC = 8 < 2\sqrt{19} = AB$ , что противоречит неравенству треугольника. Этот случай тем самым невозможен. Поэтому  $\angle B_1OA_1 + \gamma = 180^\circ$ , т.е.

$$\angle B_1OA_1 = 180^\circ - \gamma.$$

Четырехугольник  $B_1C_1A_1C$  – параллелограмм, так что  $\angle B_1C_1A_1 = \angle C = \gamma$ . Угол  $B_1OA_1$  – центральный, соответствующий вписанному углу  $B_1C_1A_1$ . Поэтому

$$2\gamma = 180^\circ - \gamma,$$

т.е.  $\gamma = 60^\circ$ . Итак,  $\angle C = 60^\circ$ .

Теперь запишем теорему косинусов для треугольника  $ABC$  и из квадратного уравнения относительно  $AC = b$  найдем его положительный корень:

$$b = 10.$$

**Задача 6** (экономический факультет МГУ, 1985). В треугольнике  $ABC$  заданы длины двух сторон:  $AB = 6$ ,  $BC = 16$ . Кроме того, известно, что центр окружности, проведенной

через вершину  $B$  и середины сторон  $AB$  и  $AC$ , лежит на биссектрисе угла  $C$ . Найдите  $AC$ .

**Решение.** Пусть  $B_1$  и  $C_1$  – середины сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно,  $O$  – центр окружности, описанной около треугольника  $B_1BC_1$  (рис. 7). По-прежнему, для треугольников  $COB_1$  и  $COB$  есть две возможности – они либо равны, либо точки  $C$ ,  $B$ ,  $O$  и  $B_1$  лежат на одной окружности. Если треугольники  $COB_1$  и  $COB$  равны, то  $AC = 2B_1C = 2BC = 32$ . Однако  $32 > 16 + 6$ , т.е. этот случай невозможен. Поэтому

$$\angle B_1OB = 180^\circ - \gamma.$$

Угол  $B_1CB$  вписанный и, следовательно, равен половине соответствующего центрального угла, т.е. угла  $B_1OB$ . Так как  $B_1C_1 \parallel BC$ , угол  $B_1C_1B$  равен  $180^\circ - \beta$ .

$$\text{Итак, } 180^\circ - \beta = \frac{180^\circ - \gamma}{2}, \text{ т.е.}$$

$$\gamma = 2\beta - 180^\circ.$$

(Отсюда, в частности, следует, что  $\angle B$  тупой.)

Далее, выражаем угол  $A$  через  $B$ :

$$\alpha = \angle A = 180^\circ - (2\beta - 180^\circ) - \beta = 360^\circ - \beta.$$

По теореме синусов,

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin \gamma}.$$

Отсюда получается уравнение относительно  $\beta$ :

$$\frac{16}{\sin(360^\circ - 3\beta)} = \frac{6}{\sin(2\beta - 180^\circ)},$$

или

$$16 \sin 2\beta = 6 \sin 3\beta.$$

После преобразований этого уравнения с использованием формул синуса двойного и тройного углов получаем уравнение относительно  $\cos \beta$ :

$$12 \cos^2 \beta - 16 \cos \beta - 3 = 0,$$

откуда

$$\cos \beta = -\frac{1}{6}$$

(второй корень больше 1).

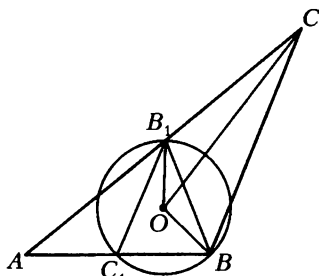


Рис. 7

Осталось применить теорему косинусов и найти, что  $AC = 10$ .

### Упражнения

**4.** В треугольнике  $ABC$  длина стороны  $BC$  равна 9, а длина стороны  $AC$  равна 21. Известно, что центр окружности, проведенной через середины сторон треугольника, лежит на биссектрисе угла  $C$ . Найдите  $AC$ .

**5.** В треугольнике  $ABC$  длина стороны  $BC$  равна 3, а длина стороны  $AB$  равна 2. Известно также, что центр окружности, проходящей через вершину  $B$  и середины сторон  $AB$  и  $AC$ , лежит на биссектрисе угла  $C$ . Найдите  $AC$ .

**Задача 7.** В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $BB_1$  и  $CC_1$ . Найдите угол  $A$ , если известно, что  $\angle C_1B_1B = 30^\circ$ , а  $\angle C \neq 120^\circ$ .

**Решение.** Пусть  $\angle C = \gamma$ . Точка  $C_2$ , симметричная точке  $C_1$  относительно  $BB_1$ , лежит на луче  $BC$ . Более того, она лежит на стороне  $BC$  (рис.8). Это следует из того, что отрезок  $BC_2 = BC_1$  меньше  $BC$ . В самом деле,  $\angle CC_1B > \angle ACC_1$  (это внешний угол треугольника  $ACC_1$ ), а  $\angle ACC_1 = \angle C_1CB$ , но во всяком треугольнике против большего угла лежит большая сторона.

Треугольник  $B_1C_1C_2$  правильный. Поэтому  $B_1C_1 = C_1C_2$ . Применим «четвертый признак» к треугольникам  $B_1CC_1$  и  $C_1CC_2$ . Эти треугольники равны, так как сумма углов  $\gamma$  и  $\angle BC_1C_2 = 60^\circ$  не равна  $180^\circ$  (вот зачем понадобилось условие  $\gamma \neq 120^\circ$ ). Следовательно,  $BC_1 = CC_2$ .

Теперь займемся подсчетом углов:

$$\angle CC_2B_1 = \frac{180^\circ - \gamma}{2},$$

$$\angle CC_2C_1 = \frac{180^\circ - \gamma}{2} + 60^\circ = 150^\circ - \frac{\gamma}{2}, \quad \angle C_1C_2B = 30^\circ + \frac{\gamma}{2},$$

$$\angle B = 180^\circ - 2\angle C_1C_2B = 120^\circ - \gamma.$$

Но тогда  $\angle C + \angle B = 120^\circ$  и  $\angle A = 60^\circ$ .

Заметим, что обратное утверждение, т.е. что если  $\angle A = 60^\circ$ , то  $\angle BB_1C_1 = 30^\circ$ , было доказано ранее.

А что будет, если в условиях предыдущей задачи  $\gamma = 120^\circ$ ?

**Задача 8.** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $120^\circ$ . Найдите  $\angle BB_1C_1$ .

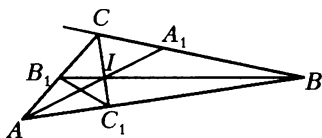


Рис. 9

**Решение.** Заметим (рис. 9), что внешний угол треугольника  $ABC$  при вершине  $C$  равен  $60^\circ$ . Так как  $CC_1$  – биссектриса,  $\angle ACC_1$  тоже равен  $60^\circ$  и  $AC$  – биссектриса внешнего угла треугольника  $C_1CB$ .

Однако  $BB_1$  – биссектриса внутреннего угла этого треугольника. Следовательно,  $B_1C_1$  – биссектриса внешнего угла  $\angle CC_1A$  треугольника  $CBC_1$ , т.е. биссектриса внутреннего угла треугольника  $ACC_1$ , а точка  $I$  – основание биссектрисы угла  $A$  этого треугольника.

Но  $\angle ACC_1 = 60^\circ$ , поэтому, как мы уже видели,  $\angle C_1B_1B = 30^\circ$ .

В заключение предлагаем вам еще две интересные задачи.

### Упражнения

6. Пусть  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  – биссектрисы углов треугольника  $ABC$ . Через вершину  $C$  проведем прямую  $l$ , параллельную  $AB$ . Пусть прямые  $A_1C_1$  и  $B_1C_1$  пересекают прямую  $l$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно. Докажите, что  $CD = CE$ .

7. Пусть  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  – биссектрисы углов треугольника  $ABC$ . Найдите угол  $C$ , если известно, что угол  $A_1C_1B_1$  прямой.



## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

*А.Заславский*

Когда я был школьником, мне довелось решать довольно много задач на определение *геометрических мест точек (ГМТ)*, т.е. множеств точек плоскости или пространства, обладающих определенным свойством. В последнее время такие задачи, к сожалению, стали встречаться значительно реже, а между тем они бывают весьма интересны и полезны. Цель данной статьи – напомнить о некоторых известных ГМТ и описать менее знаменитые.

Начнем с классической и совсем простой задачи.

**Задача 1.** *Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек  $A$  и  $B$  плоскости, есть серединный перпендикуляр к отрезку  $AB$  (рис. 1). Докажите это.*

Хотя это утверждение общеизвестно, полезно остановиться на нем, чтобы понять, как подобные утверждения доказываются. Доказывать необходимо следующее:

1. Любая точка указанного в качестве ГМТ множества обладает требуемыми свойствами.
2. Никакая точка, не принадлежащая множеству, этими свойствами не обладает.

В данном случае пункт 1 очевиден, а доказательство пункта 2 легко получить от противного, например так. Пусть  $C$  не лежит

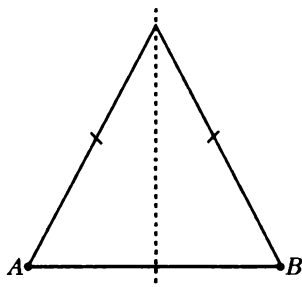


Рис. 1

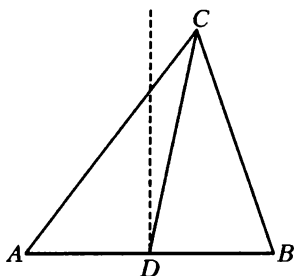


Рис. 2

на серединном перпендикуляре и  $AC = BC$ . Соединим  $C$  с серединой  $D$  отрезка  $AB$  (рис.2). Так как треугольник  $ABC$  равнобедренный, его медиана  $CD$  является также высотой, т.е. из точки  $D$  восстановлены два различных перпендикуляра к  $AB$  – противоречие.

Следующие утверждения доказываются точно так же, как задача 1, и могут считаться ее пространственными аналогами.

**Задача 2.** Геометрическое место точек, равноудаленных от двух точек пространства, есть плоскость, перпендикулярная соединяющему их отрезку и проходящая через его середину. Докажите это.

**Задача 3.** Докажите, что геометрическое место точек, равноудаленных от трех не лежащих на одной прямой точек пространства, есть прямая, перпендикулярная содержащей их плоскости и проходящая через центр описанной окружности образованного ими треугольника.

**Примечание.** Нетрудно убедиться, что эта прямая является также геометрическим местом точек, равноудаленных от всех точек описанной окружности данного треугольника.

Следствием задач 2 и 3 является, например, следующее утверждение:

*Вокруг любого тетраэдра можно описать сферу, и притом только одну.*

Действительно, пусть дан тетраэдр  $ABCD$ . Построим прямую, точки которой равноудалены от  $A, B, C$ , и плоскость, точки которой равноудалены от  $C$  и  $D$ . Так как  $CD$  не лежит в плоскости  $ABC$ , построенные прямая и плоскость пересекутся в единственной точке  $O$ , для которой по построению  $OA = OB = OC = OD$ , т.е.  $O$  – центр искомой сферы.

Следующие две задачи также общеизвестны.

**Задача 4.** Докажите, что геометрическим местом точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых плоскости, являются биссектрисы образованных этими прямыми углов (рис.3).

**Задача 5.** Докажите, что геометрическим местом точек, равноудаленных от двух параллельных прямых плоскости, является прямая, параллельная им и проходящая через середину любого отрезка  $AB$ ,

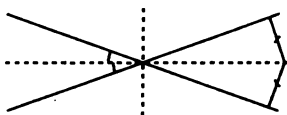


Рис. 3

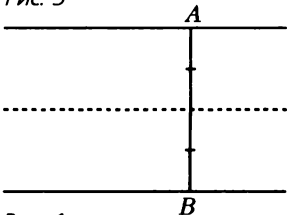


Рис. 4

конец  $A$  которого лежит на одной из прямых, а  $B$  на другой (рис. 4).

Приведем утверждения, которые могут считаться пространственными аналогами этих задач.

**Задача 6.** Геометрическим местом точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых пространства, являются две плоскости, перпендикулярные плоскости, содержащей данные прямые, и проходящие через биссектрисы образованных ими углов. Докажите это.

**Задача 7.** Геометрическим местом точек, равноудаленных от двух параллельных прямых пространства, является плоскость, перпендикулярная плоскости, содержащей данные прямые, и делящая пополам любой отрезок с концами на этих прямых. Докажите это.

**Задача 8.** Геометрическим местом точек, равноудаленных от двух пересекающихся плоскостей, являются две плоскости, делящие пополам образованные ими двугранные углы. Докажите это.

**Задача 9.** Геометрическим местом точек, равноудаленных от двух параллельных плоскостей, является плоскость, параллельная им и проходящая через середину любого отрезка с концами на этих плоскостях. Докажите это.

Используя задачи 6–9, нетрудно получить доказательства следующих утверждений.

**Задача 10.** Пусть дан трехгранный угол. Тогда биссекторные плоскости его двугранных углов пересекаются по прямой, все точки которой равноудалены от граней трехгранного угла. Докажите, что выбирая биссекторные плоскости разными способами, можно получить четыре прямые, которые образуют геометрическое место точек, равноудаленных от трех данных плоскостей.

**Задача 11.** Пусть дан трехгранный угол. Тогда плоскости, равноудаленные от его ребер, пересекаются по прямой, точки которой равноудалены от всех ребер угла. Как и в предыдущей задаче, докажите, что всего существует четыре таких прямых, образующих геометрическое место точек, равноудаленных от трех проходящих через одну точку и не лежащих в одной плоскости прямых. Очевидно также, что каждая из построенных прямых образует равные углы с данными.

Задачи 10 и 11 хорошо интерпретируются в терминах сферической геометрии. Рассмотрим треугольник на сфере, образованный тремя дугами ее больших кругов. Задача 10 означает, что в такой треугольник можно вписать окружность, лежащую на

сфере, а задача 11 – что вокруг него можно описать такую окружность (рис.5). Из задачи 10 также следует, что для любого тетраэдра существует вписанная в него сфера и четыре вневписанные, каждая из которых касается одной из его граней и продолжений трех остальных. Отметим, что в некоторых случаях могут существовать и другие сферы, касающиеся плоскостей всех граней тетраэдра.

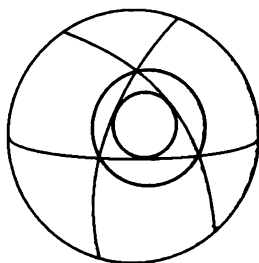


Рис. 5

**Задача 12.** Геометрическим местом точек, равноудаленных от трех прямых, образующих треугольник, являются четыре прямые, перпендикулярные плоскости треугольника и проходящие через центры его вписанной и вневписанных окружностей. Докажите это.

**Задача 13.** Геометрическим местом точек, равноудаленных от трех параллельных, не лежащих в одной плоскости прямых, является прямая, параллельная данным и проходящая через центр окружности, описанной около треугольника, образованного точками пересечения данных прямых с любой перпендикулярной им плоскостью. Докажите это.

Теперь представляется естественным определение ГМТ, равноудаленных от двух скрещивающихся прямых, а также от трех произвольных прямых в пространстве. Однако эти задачи оказываются значительно сложнее рассмотренных выше. Заинтересовавшиеся читатели могут попробовать исследовать их самостоятельно.

Перейдем теперь к менее известным задачам.

**Задача 14.** Даны две скрещивающиеся прямые. Найдите геометрическое место точек, через которые можно провести прямую, пересекающую обе данные.

**Решение.** Очевидно, что точки данных прямых принадлежат искомому ГМТ.

Рассмотрим произвольную точку  $X$ , не лежащую на данных прямых. Прямая, проходящая через  $X$  и пересекающая как  $l_1$ , так и  $l_2$ , должна лежать в каждой из плоскостей, проходящей через  $X$  и данные прямые, т.е. совпадать с прямой их пересечения. Однако эта прямая может оказаться параллельной одной из данных. Пусть, например, она параллельна прямой  $l_1$ . Тогда  $l_1$  параллельна плоскости, содержащей  $X$  и  $l_2$ , так как она параллельна прямой, лежащей в этой плоскости. Таким образом, ГМТ, через которые нельзя провести искомую прямую, – это две

параллельные плоскости, проходящие через данные прямые, без самих прямых, а искомое ГМТ содержит все остальные точки пространства.

**Задача 15.** Найдите геометрическое место точек, касательные из которых, проведенные к двум данным сферам, равны.

Рассмотрим плоский аналог этой задачи: найти ГМТ на плоскости, касательные из которых к двум данным окружностям равны. Выберем систему координат так, чтобы центры обеих окружностей лежали на оси  $OX$ . Тогда первая окружность будет иметь уравнение  $(x - a_1)^2 + y^2 = r_1^2$ , а квадрат касательной, проведенной к ней из точки  $(x, y)$ , будет равен  $(x - a_1)^2 + y^2 - r_1^2$ . Аналогично, квадрат касательной, проведенной из той же точки

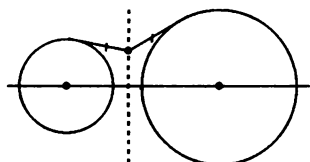


Рис. 6

ко второй окружности, будет равен  $(x - a_2)^2 + y^2 - r_2^2$ . Приравняв эти выражения, получим, что искомым ГМТ будет прямая, перпендикулярная линии центров окружностей (рис.6; эта прямая называется *радикальной осью* окружностей), если

окружности касаются или не пересекаются, или часть этой прямой без точек, лежащих внутри окружностей, если они пересекаются.

Аналогично доказывается, что в пространственном случае искомым ГМТ будет плоскость, перпендикулярная линии центров сфер (естественно назвать ее радикальной плоскостью), либо часть этой плоскости без внутренности круга, лежащего внутри данных сфер.

**Задача 16.** Найдите геометрическое место точек, касательные из которых, проведенные к трем данным сферам, равны.

**Решение.** Для каждой пары сфер построим радикальную плоскость. Если центры сфер не лежат на одной прямой, все три плоскости пересекутся по прямой, которая и будет искомым ГМТ (если у трех сфер есть общие внутренние точки, они в ГМТ не входят). Если же центры лежат на одной прямой, то три плоскости либо параллельны, либо совпадают. В первом случае искомое ГМТ пусто, во втором оно совпадает с этими плоскостями или с их частью, не лежащей внутри сфер.

**Задача 17.** К двум данным сферам проведены общие касательные. Найдите геометрическое место точек их середин.

**Решение.** Очевидно, что все точки искомого ГМТ лежат в радикальной плоскости сфер. Чтобы выяснить, какие точки этой плоскости принадлежат ГМТ, рассмотрим произвольную плоскость, проходящую через центры сфер. Эта плоскость пересекает сферы по двум окружностям, а их радикальную ось – по прямой  $l$ . Проведем к этим окружностям общие внешнюю и внутреннюю (если возможно) касательные и обозначим точки пересечения этих касательных и линии центров с  $l$  как  $A, B, C$  (рис.7). Если

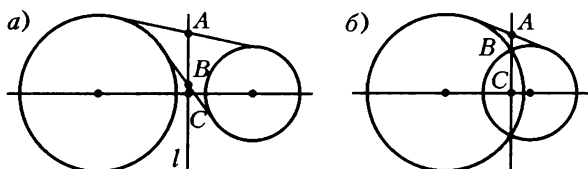


Рис. 7

взять точку на отрезке  $AB$ , то конус, образованный касательными из этой точки к любой из сфер, пересекает другую сферу. Следовательно, эти конусы пересекаются, и из данной точки можно провести к сферам общую касательную. Если же взять точку на отрезке  $BC$  или выше точки  $A$ , то соответствующие конусы пересекаться не будут и общей касательной не существует. Таким образом, искомое ГМТ – это кольцо, образованное двумя концентрическими окружностями с радиусами  $CA$  и  $CB$  (если окружности пересекаются, то  $B$  – точка их пересечения).

**Задача 18.** Дана сфера и точка  $P$  внутри нее. Три попарно перпендикулярных луча с началом в  $P$  пересекают сферу в точках  $A, B, C$ . Найдите геометрическое место точек центров тяжести треугольника  $ABC$ .

**Решение.** Рассмотрим плоский аналог задачи. Пусть дана окружность и точка  $P$  внутри нее. Два перпендикулярных луча с началом в  $P$  пересекают окружность в точках  $A$  и  $B$ . Нужно найти геометрическое место точек – середин  $AB$ . Построим прямоугольник  $PAQB$  (рис.8). Центр окружности  $O$ , как и любая точка, удовлетворяет равенству  $OP^2 + OQ^2 = OA^2 + OB^2$  (докажите!). Поскольку  $OA = OB = r$ , а  $OP$  не зависит от выбора лучей, точка  $Q$  лежит на окружности с центром  $O$ . Из соображений непрерывности ясно, что  $Q$  может попасть в любую точку

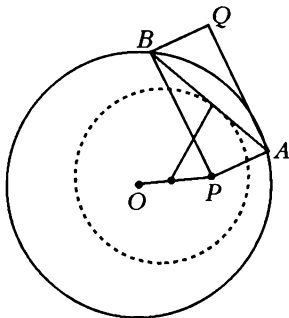


Рис. 8

этой окружности. Так как середина отрезка  $AB$  гомотетична  $O$  относительно  $P$ , искомым ГМТ будет окружность с центром в середине отрезка  $OP$ .

В пространственном случае аналогичные рассуждения показывают, что искомым ГМТ будет сфера, центр которой  $X$  лежит на отрезке  $OP$  и делит его в отношении  $OX : XP = 2 : 1$ .

**Задача 19.** Дана сфера и точка  $P$ . Найдите геометрическое место центров сечений сферы плоскостями, проходящими через  $P$ .

**Решение.** Рассмотрим плоский аналог задачи. Пусть прямая, проходящая через точку  $P$ , пересекает окружность в точках  $A$  и  $B$ ,  $C$  – середина  $AB$ ,  $O$  – центр окружности (рис.9). Тогда  $OC$  перпендикулярна  $AB$ , т.е. угол  $OSP$  прямой и  $C$  лежит на окружности с диаметром  $OP$ . Искомым ГМТ будет часть этой окружности, лежащая внутри исходной.

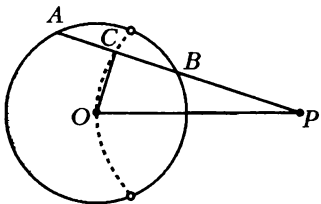


Рис. 9

Аналогично, в пространственном случае искомым ГМТ будет

часть сферы с диаметром  $OP$ , лежащая внутри данной.

**Задача 20.** Дан шаровой сегмент. Рассматриваются пары сфер, вписанных в этот сегмент и касающихся друг друга. Найдите геометрическое место точек касания.

**Решение.** Рассмотрим плоский аналог задачи. Пусть круговой сегмент ограничен дугой и хордой  $AB$  окружности с центром  $O$ , окружность с центром  $O'$  касается дуги в точке  $C$ , а хорды в точке  $Q$ ,  $P$  – середина дуги  $AB$ , не содержащей  $C$  (рис.10). Из подобия треугольников  $CO'Q$  и  $COP$  следует, что точки  $C$ ,  $Q$  и  $P$  лежат на одной прямой. Кроме того, треугольники  $CAP$  и  $AQP$  подобны, так как углы  $ACP$  и  $PAQ$  опираются на равные дуги. Следовательно,  $PQ \cdot PC = PA^2$ . Но  $PQ \cdot PC$  – это квадрат касательной, проведенной из  $P$  к произвольной окружности, вписанной в сегмент. Значит, если взять две таких касающихся друг друга окружности, то, во-первых,  $P$  лежит на их радикальной оси, т.е. общей касательной, а, во-вторых, расстояние от  $P$  до точки касания равно  $PA$ . Таким образом, все точки касания лежат на окружности с центром  $P$  и радиусом  $PA$  и, очевидно, заполняют дугу  $AB$  этой окружности.

Аналогично, в пространственном случае искомым ГМТ будет часть сферы с центром в точке, противоположной вершине сегмента, и содержащей его граничную окружность, лежащая внутри сегмента.

## ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ РАСПОЛОЖЕНИЯ СФЕРЫ И ПИРАМИДЫ

В.Мирошин

Среди множества различных случаев расположения сферы и пирамиды мы рассмотрим только один – тот, когда сфера касается боковых граней пирамиды в точках, лежащих на ребрах основания. Задача, послужившая прототипом множества подобных задач, более трудоемких, но не более трудных, появилась в 1995 году на вступительном экзамене по математике на механико-математическом факультете МГУ.

Обычно рассматриваются случаи касания сферы отдельно с плоскостями граней, отдельно с ребрами пирамиды, а тут – все вместе, что как раз и представляется интересным.

**Задача 1** (мехмат МГУ, 1995 г.). *Высота пирамиды равна 5, а основанием служит треугольник со сторонами 7, 8, 9. Некоторая сфера касается плоскостей всех боковых граней пирамиды в точках, лежащих на сторонах основания. Найдите радиус сферы.*

**Решение.** Обозначим центр сферы  $O$  и рассмотрим пирамиду  $OABC$ , «пристроенную» к исходной пирамиде (рис.1).

Стороны треугольника  $ABC$  касаются сферы, следовательно, сечение сферы плоскостью  $(ABC)$  есть окружность, вписанная в треугольник основания.

Радиусы сферы  $OK$ ,  $OL$ ,  $OM$ , проведенные в точки касания, играют в пирамиде  $OABC$  роль апофем. Так как они равны, то грани пирамиды  $OABC$  одинаково наклонены к плоскости основания, и, таким образом, высота пирамиды  $OABC$ , совпадающая с отрезком перпендикуляра, проведенного из центра сферы на секущую плоскость, попадает в центр окружности  $O_1$ , вписанной в треугольник  $ABC$ .

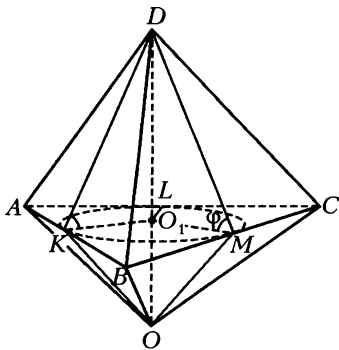


Рис. 1



Сфера касается не только сторон основания, но и боковых граней пирамиды  $DABC$  в тех же точках. Поэтому по признаку перпендикулярности плоскостей получим, что грани двух рассматриваемых пирамид, имеющие общее ребро, попарно перпендикулярны:  $(OAB) \perp (DAB)$ ,  $(OAC) \perp (DAC)$ ,  $(OBC) \perp (DBC)$ .

Но тогда (и именно в этом состоит вся изюминка данного способа касания сферы и пирамиды), боковые грани пирамиды  $DABC$  также одинаково наклонены к плоскости основания. Поэтому и высота пирамиды  $DABC$  также попадет в центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . Кроме того, основания апофем боковых граней пирамиды  $DABC$  совпадут с точками касания сферы с соответствующими ребрами основания пирамиды.

Таким образом, при указанном расположении сферы и пирамиды центр сферы  $O$ , вершина пирамиды  $D$  и центр окружности

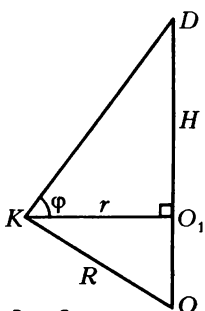


Рис. 2

$O_1$ , вписанной в основание, лежат на одном перпендикуляре, проведенном к плоскости основания пирамиды. Этот перпендикуляр  $DO$ , радиус сферы  $OK$  и апофема  $DK$  боковой грани пирамиды – стороны прямоугольного треугольника, в котором высотой, проведенной к гипотенузе, служит радиус окружности, вписанной в основание (рис.2). На этом рисунке показаны также угол наклона боковых граней пирамиды  $DABC$  к плоскости основания  $\varphi$ , высота пирамиды  $H$ , искомый радиус сферы  $R$  и радиус вписанной в основание окружности  $r$ .

Теперь можно перейти к вычислениям. По формуле Герона площадь основания пирамиды равна  $S = \sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = 12\sqrt{5}$ .

Величину  $r$  найдем, используя формулу  $r = \frac{S}{p}$ , где  $p$  – полупериметр основания:

$$r = \sqrt{5}. \text{ Отсюда } \operatorname{tg} \varphi = \frac{H}{r} = \sqrt{5}, \quad \sin \varphi = \sqrt{\frac{5}{6}},$$

$$R = \frac{r}{\sin \varphi} = \sqrt{6}.$$

**Ответ:**  $\sqrt{6}$ .

Минимум вычислений при максимуме идей!

Задача, видимо, так понравилась, что уже через 3 года она была повторена, однако в гораздо более сложном варианте.

**Задача 2** (мехмат МГУ, 1998 г.). Дана пирамида  $ABCD$ . Сфера касается граней  $DAB$ ,  $DAC$ ,  $DBC$  в точках  $K$ ,  $L$ ,  $M$

соответственно. При этом точка  $K$  находится на стороне  $AB$ , точка  $L$  — на стороне  $AC$ , точка  $M$  — на стороне  $BC$ . Известно, что радиус сферы равен 3,  $\angle ADB = 90^\circ$ ,  $\angle BDC = 105^\circ$ ,  $\angle ADC = 75^\circ$ . Найдите объем пирамиды.

**Решение.** Как мы видим, условие в основной части, относящейся к расположению пирамиды и сферы, повторяет условие предыдущей задачи. Поэтому расположение вершины пирамиды, центра вписанной окружности и центра сферы такое же, как и предыдущей задаче (рис. 3). Аналогично получаем, что грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания пирамиды. И в данной задаче именно этот факт играет определяющую роль.

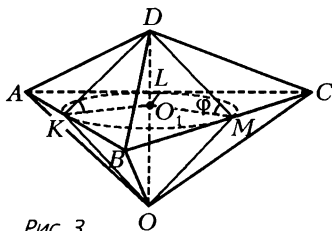


Рис. 3

Двугранные углы пирамиды являются элементами трехгранных ее углов, с вершинами в вершинах основания. Изучение тригонометрии трехгранного угла не входит в курс общеобразовательной школы, однако знакомство с ней повысит математическую эрудицию абитуриентов и существенно облегчит решение некоторых стереометрических задач.

Приведем основные определения и теоремы, связанные с тригонометрией трехгранного угла.

Трехгранным углом называется фигура, образованная тремя лучами  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$ , исходящими из точки  $S$  (рис. 4.). Точка  $S$  называется вершиной трехгранного угла, лучи  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  — его ребрами, плоские углы  $ASB$ ,  $ASC$ ,  $BSC$  — его гранями.

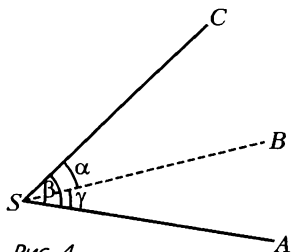


Рис. 4

Основными элементами трехгранного угла являются плоские углы  $\angle BSC = \alpha$ ,  $\angle ASC = \beta$ ,  $\angle ASB = \gamma$ , а также противолежащие им двугранные углы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , ребрами которых являются соответственно лучи  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  соответственно.

В тригонометрии трехгранных углов используются в основном три теоремы: теорема синусов и две теоремы косинусов.

**Теорема синусов.** Синусы плоских углов трехгранного угла пропорциональны синусам противолежащих им двугранных углов трехгранного угла

$$\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C}.$$

**Следствие.** Если двугранные углы трехгранного угла равны, то противолежащие им плоские углы трехгранного угла либо равны, либо дополняют друг друга до  $180^\circ$ .

**Первая теорема косинусов.** Косинус плоского угла трехгранного угла равен произведению косинусов двух других плоских углов, сложенному с произведением синусов этих углов на косинус двугранного угла, противолежащего искомому плоскому:

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A.$$

**Вторая теорема косинусов.** Косинус двугранного угла трехгранного угла равен произведению косинусов двух других двугранных углов, взятому с противоположным знаком, плюс произведение синусов этих углов на косинус плоского угла, противолежащего данному двугранному:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos \alpha.$$

Вернемся к решению задачи. Из ее условия и следствия из теоремы синусов для трехгранного угла вытекает, что углы  $\angle DAB = \angle DAC$ , так как оба эти угла острые, а противолежащие им двугранные углы при ребрах  $AB$  и  $AC$  равны. Аналогично,  $\angle DCA = \angle DCB$ ,  $\angle DBC = \angle DBA$ .

Обозначим  $\angle DAB = \angle DAC = \alpha$ ,  $\angle DCA = \angle DCB = \gamma$ ,  $\angle DBC = \angle DBA = \beta$ . Рассматривая сумму углов всех боковых граней пирамиды, получаем, что  $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 3\pi - \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ ,

откуда  $\alpha + \beta + \gamma = \frac{3\pi}{4}$ . Теперь можно определить каждый из углов:  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ,  $\beta = \frac{\pi}{6}$ ,  $\gamma = \frac{\pi}{4}$ .

Обозначим апофему боковой грани пирамиды  $h$ , а угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости ее основания  $\varphi$ . Далее проведем простые выкладки:

$$h = R \operatorname{tg} \varphi, \quad H = h \sin \varphi = R \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi,$$

$$p = h(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma) = R \operatorname{tg} \varphi (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma),$$

$$S_{\text{бок}} = ph = R^2 \operatorname{tg}^2 \varphi (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma),$$

$$S_{\text{осн}} = S_{\text{бок}} \cos \varphi = R^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos \varphi (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma),$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H = \frac{1}{3} R^3 \operatorname{tg}^3 \varphi \cos \varphi \sin \varphi (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma) = \\ &= \frac{1}{3} R^3 \operatorname{tg}^2 \varphi \sin^2 \varphi (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} R^3 \left( \frac{1 - \cos^2 \varphi}{\cos \varphi} \right)^2 (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma).$$

Таким образом, все сводится к нахождению косинуса угла наклона боковой грани к основанию пирамиды.

Сначала найдем косинус какого-нибудь угла треугольника  $ABC$ , например, угла  $C$ . Имеем:

$$AB = h(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) = h \left( \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

$$BC = h(\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma) = h(1 + \sqrt{3}),$$

$$AC = h(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \gamma) = h \left( \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \right).$$

Воспользовавшись теоремой косинусов

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \angle C,$$

получим

$$\frac{16}{3} = \frac{1}{3}(\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{3} + 1)^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{3} + 1)^2 \cos \angle C,$$

откуда

$$\cos \angle C = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2.$$

Теперь, наконец, можно определить косинус двугранного угла при основании пирамиды. Воспользуемся первой теоремой косинусов для трехгранного угла. Имеем:

$$\cos \gamma = \cos \gamma \cos \angle C + \sin \gamma \sin \angle C \cos \varphi.$$

А так как  $\gamma = \frac{\pi}{4}$ , то

$$\cos \varphi = \frac{1 - \cos \angle C}{\sin \angle C} = \operatorname{tg} \frac{\angle C}{2} = \frac{\sqrt{1 - \cos \angle C}}{\sqrt{1 + \cos \angle C}} = \sqrt{\frac{4\sqrt{3} - 3}{13}}.$$

Осталось сделать подстановку найденных величин в формулу для объема пирамиды. После очевидных арифметических выкладок получаем ответ.

**Ответ:**  $V = 48$ .

И, наконец, задача, сравнительно недавно предлагавшаяся на вступительном экзамене в МФТИ.

**Задача 3** (МФТИ. 2005 г.). *Сфера касается боковых граней четырехугольной пирамиды  $SABCD$  в точках, лежащих на ребрах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  (рис. 5). Известно, что высота пирамиды равна  $2\sqrt{5}$ ,  $AB = 6$ ,  $SA = 5$ ,  $SB = 7$ ,  $SC = 2\sqrt{10}$ . Найдите длины ребер  $BC$  и  $CD$ , радиус сферы и двугранный угол при ребре  $SD$ .*

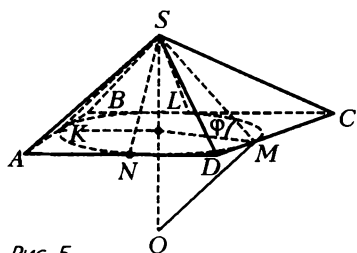


Рис. 5

**Решение.** Используем результаты предыдущих задач. Поскольку в основание пирамиды можно вписать окружность, то четырехугольник  $ABCD$  — описанный около окружности. Так как все апофемы равны, то боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания пирамиды. Центр сферы, центр вписанной окру-

ности и вершина пирамиды расположены на одном перпендикуляре.

Найдем радиус сферы. Так как в треугольнике  $ASB$  известны длины всех сторон: 5, 6, 7, то по формуле Герона площадь треугольника равна  $S = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 6\sqrt{6}$ . Значит, длина апофемы  $h = 2\sqrt{6}$ . Радиус окружности, вписанной в четырехугольник  $ABCD$ , равен  $r = \sqrt{h^2 - H^2} = \sqrt{24 - 20} = 2$ . Находим синус угла наклона боковой грани к плоскости основания пирамиды:

$$\sin \varphi = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5}{6}}. \text{ Отсюда } R = \frac{r}{\sin \varphi} = 2\sqrt{\frac{6}{5}}.$$

Определяя радиус сферы, мы попутно нашли апофему и радиус вписанной окружности. Применяя теперь последовательно теорему Пифагора и свойства касательных, проведенных из одной точки к окружности, получим:

$$AK = AN = \sqrt{SA^2 - h^2} = \sqrt{25 - 24} = 1,$$

$$BK = BL = 5, \quad CL = CM = 4.$$

Таким образом, длина ребра  $BC = 9$ .

Найдем величину тригонометрических функций угла  $D$  четырехугольника  $ABCD$ . Во-первых, используя радиус вписанной окружности и отрезки касательных, получим  $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = 2$ ,  $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{2}{5}$ ,

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{2}. \text{ Следовательно, } \frac{A}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}. \text{ Откуда } \frac{B}{2} + \frac{D}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Таким образом находим, что } \operatorname{tg} \frac{D}{2} = \frac{5}{2}, \quad \cos D = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{D}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{D}{2}} = -\frac{21}{29},$$

$$\sin D = \frac{20}{29}.$$

Для нахождения длины ребра  $CD$  достаточно найти длину отрезка  $MD$ . Но  $\frac{r}{MD} = \operatorname{tg} \frac{D}{2} = \frac{5}{2}$ , откуда  $MD = \frac{4}{5}$ ,  $CD = 4,8$ .

Рассмотрим  $\angle SDA$  и  $\angle SDC$ . Так как противолежащие им двугранные углы равны и проекция ребра  $SD$  есть биссектриса угла  $D$ , то указанные углы также равны. Обозначая эти углы  $\alpha$ , по первой теореме косинусов трехгранного угла имеем  $\cos \alpha = \cos \alpha \cos D + \sin \alpha \sin D \cos \varphi \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - \cos D}{\sin D \cos \varphi}$ .

Подставляя известные значения, получим, что  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{2} \sqrt{6}$ . Двугранный угол при ребре  $SD$  противолежит плоскому углу  $D$ , поэтому по первой теореме косинусов получим

$$\cos D = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos \psi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \cos \psi,$$

или

$$-\frac{21}{29} = \frac{4}{34} + \frac{30}{34} \cos \psi \Rightarrow \cos \psi = -\frac{67}{87},$$

и

$$\psi = \arccos\left(-\frac{67}{87}\right) = \pi - \arccos \frac{67}{87}.$$

**Ответ:**  $R = 2\sqrt{\frac{6}{5}}$ ;  $BC = 9$ ;  $CD = 4,8$ ;  $\psi = \pi - \arccos \frac{67}{87}$ .

### Упражнения

**1** (мехмат, МГУ, 1995 г.). Некоторая сфера радиуса  $\sqrt{3}$  касается плоскостей всех боковых граней пирамиды в точках, лежащих на сторонах основания. Основанием служит треугольник со сторонами 5, 6, 9. Найдите высоту пирамиды.

**2** (мехмат, МГУ, 1998 г.). Дана пирамида  $ABCD$ . Сфера касается граней  $ABC$ ,  $ACD$ ,  $ADB$  в точках  $K$ ,  $L$ ,  $M$  соответственно. При этом точка  $K$  находится на стороне  $BC$ , точка  $L$  – на стороне  $CD$ , точка  $M$  – на стороне  $DB$ . Известно, что радиус сферы равен  $\sqrt{3}$ ,  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $\angle CAD = 75^\circ$ ,  $\angle DAB = 75^\circ$ . Найдите объем пирамиды.

**3** (МФТИ, 2005 г.). Сфера касается боковых граней четырехугольной пирамиды  $ABCD$  в точках, лежащих на ребрах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$ . Известно, что высота пирамиды равна  $\sqrt{6}$ ,  $AB = 8$ ,  $SA = 4$ ,  $SB = 8$ ,  $SC = 4\sqrt{6}$ . Найдите длины ребер  $BC$  и  $CD$ , радиус сферы и двугранный угол при ребре  $SD$ .

## О ДИНАМИКЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ

*В.Плис*

Из школьного курса физики известно, что равномерное движение по окружности – так называют движение материальной точки по окружности с постоянной по величине скоростью – есть движение с ускорением. Это ускорение обусловлено равномерным изменением с течением времени направления скорости точки. В любой момент времени вектор ускорения направлен к центру окружности, а его величина постоянна и равна

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R ,$$

где  $v$  – линейная скорость точки,  $R$  – радиус окружности,  $\omega$  – угловая скорость радиуса-вектора точки,  $T$  – период обращения. В этом случае ускорение называют центростремительным, или нормальным, или радиальным.

Очевидно, что возможно криволинейное движение не только по окружности и не обязательно равномерное. Поговорим немного о кинематике произвольного криволинейного движения. Рассмотрим сначала неравномерное движение материальной точки по окружности. При таком движении изменяется со временем не

только направление вектора скорости  $\vec{v}$ , но и его величина. В этом случае приращение  $\Delta\vec{v}$  вектора скорости за малое время от  $t$  до  $t + \Delta t$  удобно представить в виде суммы  $\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_\tau + \Delta\vec{v}_n$  (рис.1). Здесь  $\Delta\vec{v}_\tau$  – касательная тангенциальная составляющая приращения скорости, сонаправленная с вектором скорости и обусловленная приращением величины вектора скорости на  $\Delta v_\tau = \Delta v \cos \theta$ , а  $\Delta\vec{v}_n$  – нормальная составляющая, обусловленная (как и в случае равномерного движения

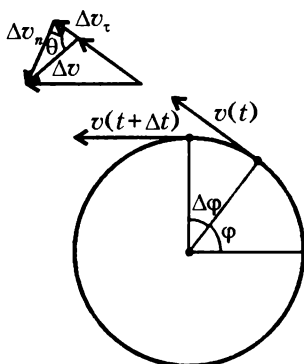


Рис. 1

по окружности) вращением вектора скорости. Тогда естественно и ускорение представить в виде суммы касательной (тангенциальной) и нормальной составляющих:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}_\tau}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Для проекций вектора ускорения на касательное и нормальное направления справедливы соотношения

$$a_\tau = \frac{\Delta v_\tau}{\Delta t}, \quad a_n = \frac{v^2}{R}.$$

Отметим, что касательная составляющая ускорения характеризует быстроту изменения величины скорости, а нормальная составляющая характеризует быстроту изменения направления скорости. По теореме Пифагора,

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

В случае движения по произвольной криволинейной траектории все указанные соотношения также справедливы, при этом в формуле для нормального ускорения  $a_n$  под величиной  $R$  надо понимать радиус такой окружности, с элементарной дужкой которой совпадает участок криволинейной траектории в малой окрестности того места, где находится движущаяся материальная точка. Величину  $R$  называют радиусом кривизны траектории в данной точке.

Теперь рассмотрим несколько конкретных задач на криволинейное движение, предлагавшихся в последние годы на вступительных экзаменах и олимпиадах по физике в ведущих вузах страны.

**Задача 1.** Камень брошен со скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту. Найдите радиус  $R$  кривизны траектории в окрестности точки старта. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

Для ответа на вопрос задачи воспользуемся соотношением для нормального ускорения:

$$a_n = \frac{v^2}{R}.$$

В малой окрестности точки старта  $v = v_0$  (рис.2). Нормальное ускорение  $a_n$  есть проекция ускорения свободно-

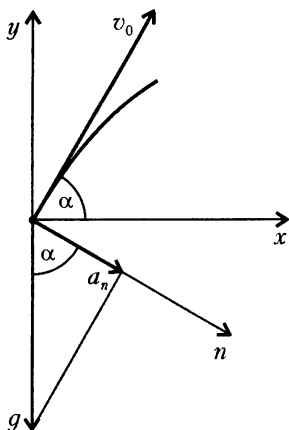


Рис. 2



го падения  $\vec{g}$  на нормаль  $\vec{n}$  к траектории:  $a_n = g \cos \alpha$ . Это дает

$$R = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha}.$$

**Задача 2.** Определите вес  $P$  тела массой  $m$  на географической широте  $\varphi$ . Ускорение, сообщаемое силой тяжести, равно  $g$ . Землю считайте однородным шаром радиусом  $R$ .

Напомним, что вес тела  $\vec{P}$  — это сила, обусловленная тяготением, с которой тело действует на опору или подвес. Допустим, что тело лежит на поверхности вращающейся Земли.

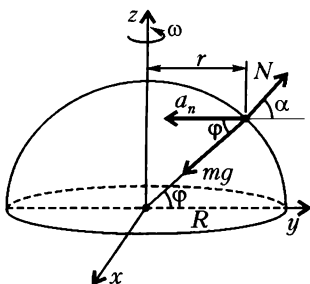


Рис. 3

На него действуют сила тяжести  $m\vec{g}$ , направленная к центру Земли, и сила реакции опоры  $\vec{N}$  (рис.3). По третьему закону Ньютона,  $\vec{P} = -\vec{N}$ . Поэтому для определения веса тела найдем силу реакции  $N$ .

В инерциальной системе отсчета, центр которой находится в центре Земли, тело равномерно движется по окружности радиусом  $r = R \cos \varphi$  с периодом одни сутки, т.е.  $T = 86400$  с, и циклической частотой

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}.$$

Ускорение тела по величине равно

$$a_n = \omega^2 r = \omega^2 R \cos \varphi$$

и направлено к оси вращения Земли. Из этого следует, что равнодействующая сил тяжести и реакции опоры тоже должна быть направлена к оси вращения Земли. Тогда при  $0 < \varphi < \pi/2$  сила реакции образует с перпендикуляром к оси вращения некоторый угол  $\alpha \neq \varphi$ . По второму закону Ньютона,

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}.$$

Перейдем к проекциям сил и ускорения на радиальное направление:

$$m\omega^2 R \cos \varphi = mg \cos \varphi - N \cos \alpha,$$

и на направление, перпендикулярное плоскости, в которой происходит движение:

$$0 = -mg \sin \varphi + N \sin \alpha.$$

Исключая  $\alpha$  из двух последних соотношений, находим вес тела,

покоящегося на вращающейся Земле:

$$P = N = \sqrt{(mg)^2 - m^2 \omega^2 R (2g - \omega^2 R) \cos^2 \varphi}.$$

**Задача 3.** Расстояние от Земли до двойной звезды в созвездии Центавра равно  $L = 2,62 \cdot 10^5$  а.е. Наблюдаемое угловое расстояние между звездами периодически изменяется с периодом  $T = 80$  лет и достигает наибольшего значения  $\varphi = 0,85 \cdot 10^{-5}$  рад. Определите суммарную массу  $M$  звезд. Постоянная всемирного тяготения  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  ( $\text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$ ),  $1 \text{ а.е.} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ м}$ . Орбиты звезд считайте круговыми.

Под действием гравитационных сил

$$F_1 = F_2 = G \frac{m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2}$$

звезды движутся равномерно с периодом  $T$  по окружностям радиусов  $r_1$  и  $r_2$  вокруг центра масс системы со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  соответственно (рис.4). По второму закону Ньютона,

$$\frac{m_1 v_1^2}{r_1} = G \frac{m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2},$$

$$\frac{m_2 v_2^2}{r_2} = G \frac{m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2}.$$

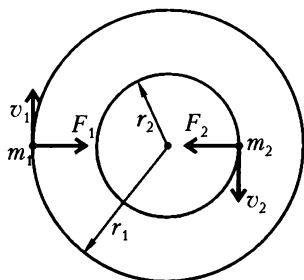


Рис. 4

Сложив эти равенства (после сокращения на  $m_1$  и  $m_2$  соответственно), получим

$$G \frac{m_1 + m_2}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{v_1^2}{r_1} + \frac{v_2^2}{r_2}.$$

Отсюда с учетом соотношений

$$r_1 + r_2 = L\varphi, \quad v_1 = \frac{2\pi r_1}{T}, \quad v_2 = \frac{2\pi r_2}{T}$$

приходим к ответу

$$M = m_1 + m_2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{L^3 \varphi^3}{G} \approx 3,5 \cdot 10^{27} \text{ кг}.$$

**Задача 4.** На горизонтальной платформе стоит сосуд с водой (рис.5). В сосуде закреплен тонкий стержень АВ, наклоненный к горизонту под углом  $\alpha$ . Однородный шарик радиусом  $R$  может скользить без трения вдоль стержня, проходящего через его центр. Плотность материала шарика  $\rho_0$ , плотность

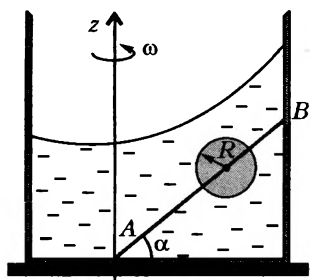


Рис. 5

воды  $\rho$ ,  $\rho_0 < \rho$ . При вращении системы с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси, проходящей через нижний конец  $A$  стержня, центр шарика устанавливается на расстоянии  $L$  от этого конца. С какой по величине силой  $F$  шарик действует на стержень? Какова угловая скорость  $\omega$  вращения платформы? При какой минимальной угловой скорости  $\omega_{\min}$

шарик «утонет», т.е. окажется у дна сосуда?

Обозначим объем шарика  $V$ ,  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ . На шарик будут действовать три силы: сила тяжести  $\rho_0 V \vec{g}$ , сила нормальной реакции  $\vec{N}$  со стороны стержня (шарик действует на стержень с такой же по величине и противоположной по направлению силой) и сила Архимеда  $\vec{F}_A$ . Найдем архимедову силу.

Рассмотрим движение жидкости в отсутствие шарика. Любой элементарный объем воды равномерно движется по окружности радиусом  $r$  в горизонтальной плоскости. Следовательно, вертикальная составляющая суммы сил давления (силы Архимеда) уравнивает силу тяжести, действующую на жидкость в рассматриваемом объеме, а горизонтальная составляющая сообщает этой жидкости центростремительное ускорение  $a_n = \omega^2 r$ . При замещении жидкости шариком эти составляющие не изменяются, а сила, действующая на водяной шарик со стороны тонкого стержня, равна нулю. Тогда вертикальная составляющая силы Архимеда по величине равна силе тяжести водяного шара:

$$F_{Az} = \rho V g,$$

а направленная к оси вращения составляющая силы Архимеда сообщает водяному шару центростремительное ускорение  $a_n = \omega^2 L \cos \alpha$  и по величине равна

$$F_{An} = \rho V \omega^2 L \cos \alpha.$$

Под действием всех приложенных сил шарик движется равномерно по окружности радиусом  $L \cos \alpha$  в горизонтальной плоскости (рис. 6). По второму закону Ньютона,

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_A.$$

Переходя к проекциям сил и ускорений на вертикальную ось,

находим

$$\rho Vg - \rho_0 Vg - N \cos \alpha = 0.$$

Проектируя силы и ускорения в горизонтальной плоскости на радиальное направление, получаем

$$\rho_0 VL\omega^2 \cos \alpha = \rho VL\omega^2 \cos \alpha - N \sin \alpha.$$

Из двух последних соотношений определяем величину силы нормальной реакции стержня, а значит, и силу давления шарика на стержень:

$$F = N = \frac{(\rho - \rho_0) Vg}{\cos \alpha}$$

и угловую скорость:

$$\omega = \sqrt{\frac{g \operatorname{tg} \alpha}{L \cos \alpha}}.$$

Как видим, с ростом угловой скорости  $\omega$  расстояние  $L$  уменьшается. В момент, когда шар приблизится ко дну,  $L = \frac{R}{\sin \alpha}$ , при этом

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{R}} \operatorname{tg} \alpha.$$

**Задача 5.** Однородную цепочку длиной  $L$  поместили на гладкую сферическую поверхность радиусом  $R$  так, что один ее конец закреплен на вершине сферы. Верхний конец цепочки освобождают. С каким по величине ускорением  $a_\tau$  будет двигаться сразу после освобождения каждый элемент цепочки? Масса единицы длины цепочки  $\rho$ . Ускорение свободного падения равно  $g$ .

Рассмотрим элементарный участок цепочки длиной  $\Delta L = R\Delta\varphi$  (рис.7). Его масса равна  $\Delta m = \rho\Delta L$ . Силы, действующие на выделенный участок, показаны на рисунке. По второму закону Ньютона,

$$\Delta m \vec{a} = \vec{T}(\varphi + \Delta\varphi) + \vec{T}(\varphi) + \Delta m \vec{g} + \Delta \vec{N}.$$

Переходя к проекциям сил и ускорений на касательное направление, получаем

$$\begin{aligned} \Delta m a_\tau &= \\ &= T(\varphi + \Delta\varphi) - T(\varphi) + \Delta m g \sin \varphi. \end{aligned}$$

Перепишем полученное соотношение

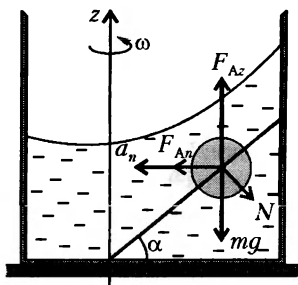


Рис. 6

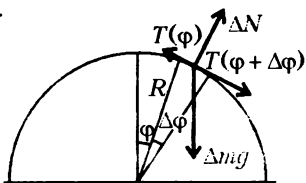


Рис. 7

в виде

$$\Delta T = \rho R (a_\tau - g \sin \varphi) \Delta \varphi.$$

Просуммируем приращения силы натяжения по всей длине цепочки:

$$\sum \Delta T = \rho R \sum (a_\tau - g \sin \varphi) \Delta \varphi.$$

Теперь учтем, что на свободных концах цепочки силы натяжения обращаются в ноль, т.е.  $\sum \Delta T = 0$ , ускорение  $a_\tau$  одинаково у всех элементарных фрагментов,  $\sum \Delta \varphi = \frac{L}{R}$ ,  $\Delta(\cos \varphi) = -\sin \varphi \cdot \Delta \varphi$ , и получим

$$a_\tau = g \frac{R}{L} \left( 1 - \cos \frac{L}{R} \right).$$

**Задача 6.** Ведущие колеса паровоза соединены реечной передачей, одно звено которой представляет собой плоскую горизонтальную штангу, шарнирно прикрепленную к спицам соседних колес на расстоянии  $R/2$  от оси, где  $R$  – радиус колеса. При осмотре паровоза механик поставил на эту штангу ящик и по рассеянности забыл его там. Паровоз трогается с места и очень медленно набирает скорость. Оцените скорость  $v_1$  паровоза, при которой ящик начнет проскальзывать относительно штанги. Коэффициент трения скольжения ящика по штанге  $\mu = 0,4$ , радиус колеса  $R = 0,8$  м, ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

Перейдем в систему отсчета, связанную с паровозом (рис.8). Поскольку разгон происходит очень медленно, эту систему можно считать инерциальной. До начала проскальзывания ящик движется по окружности радиусом  $r = R/2$ . По второму закону Ньютона,

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$$

Вектор ускорения ящика направлен к центру окружности и по величине равен  $a = \omega^2 r$ , где  $\omega$  – угловая скорость вращения колес

паровоза. Обозначим угол, который вектор ускорения образует в данный момент времени с горизонтом, буквой  $\beta$ . Переходя к проекциям сил и ускорения на горизонтальную и вертикальную

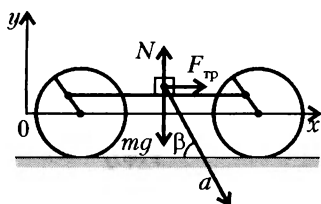


Рис. 8

оси, с учетом того, что  $F_{\text{тр}} \leq \mu N$ , получаем

$$m\omega^2 r \cos \beta \leq \mu N,$$

$$m\omega^2 r \sin \beta = mg - N.$$

Исключив отсюда силу реакции опоры, приходим к неравенству

$$\omega^2 r (\cos \beta + \mu \sin \beta) \leq \mu g.$$

Наибольшее значение выражения

$$\cos \beta + \mu \sin \beta = \sqrt{1 + \mu^2} \cos(\beta - \alpha),$$

где угол  $\alpha$  таков, что  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}$  и  $\sin \alpha = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}$ , дос-

тигается при  $\beta = \alpha$  и равно  $\sqrt{1 + \mu^2}$ . Движение груза будет происходить без проскальзывания до тех пор, пока угловая скорость вращения колес паровоза будет удовлетворять неравенству

$$\omega \leq \sqrt{\frac{\mu g}{r \sqrt{1 + \mu^2}}}.$$

Отсюда для искомой скорости паровоза  $v_1$  получаем

$$v_1 = \omega_{\text{max}} R = \sqrt{\frac{2\mu g R}{\sqrt{1 + \mu^2}}} \approx 2,4 \text{ м/с}.$$

**Задача 7.** Гладкий желоб состоит из горизонтальной части  $AB$  и дуги окружности  $BD$  радиусом  $R = 5 \text{ м}$  (рис.9). Шайба скользит по горизонтальной части со скоростью  $v_0 = 10 \text{ м/с}$ . Определите величину ускорения шайбы в точке  $C$  и угол  $\beta$ , который вектор  $\vec{a}$  ускорения шайбы в этот момент составляет с нитью. Радиус  $OC$  образует с вертикалью угол  $\alpha = 60^\circ$ . Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

Для определения ускорения шайбы в точке  $C$  найдем тангенциальную  $a_t$  и нормальную  $a_n$  составляющие ускорения в этой точке.

На тело, движущееся в вертикальной плоскости по дуге  $BD$ , в любой точке действуют силы тяжести  $m\vec{g}$  и реакции опоры  $\vec{N}$ . По

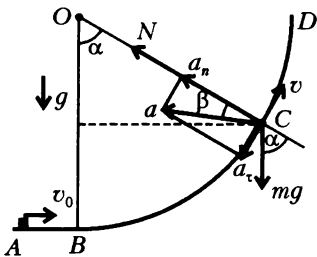


Рис. 9

второму закону Ньютона,

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}.$$

Перейдем к проекциям сил и ускорения на тангенциальное направление и найдем  $a_\tau$ :

$$ma_\tau = -mg \sin \alpha, \text{ откуда } a_\tau = -g \sin \alpha \approx -8,7 \text{ м/с}^2.$$

Для определения нормальной составляющей ускорения найдем величину  $v$  скорости шайбы в точке  $C$  (поскольку  $a_n = v^2/R$ ). Обратимся к энергетическим соображениям. Потенциальную энергию шайбы на горизонтальной части желоба будем считать равной нулю. Тогда по закону сохранения полной механической энергии,

$$m \frac{v_0^2}{2} = m \frac{v^2}{2} + mgR(1 - \cos \alpha),$$

откуда

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{v_0^2}{R} - 2g(1 - \cos \alpha) = 10 \text{ м/с}^2.$$

Величину ускорения шайбы в точке  $C$  найдем по теореме Пифагора:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \approx 13,2 \text{ м/с}^2.$$

В точке  $C$  вектор ускорения  $\vec{a}$  образует с нитью угол  $\beta$  такой, что

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a_\tau}{a_n} \approx 0,87, \text{ откуда } \beta \approx 41^\circ.$$

**Задача 8.** По гладкой проволоочной винтовой линии радиусом  $R$  с шагом  $h$ , ось которой вертикальна, скользит с нулевой начальной скоростью бусинка массой  $m$ . За какое время  $T$  бусинка опустится по вертикали на  $H$ ? С какой по величине силой  $F$  бусинка действует на проволоку в этот момент?

Ускорение свободного падения равно  $g$ .

На бусинку действуют силы тяжести  $m\vec{g}$  и нормальной реакции  $\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2$ , где  $\vec{N}_1$  направлена горизонтально (перпендикулярно плоскости рисунка 10), а  $\vec{N}_2$  лежит в одной плоскости с векторами  $m\vec{g}$  и  $\vec{v}$ .

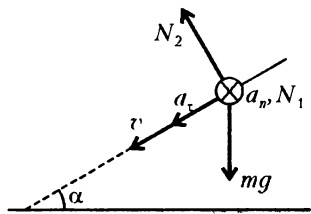


Рис. 10

Для ответа на вопросы задачи найдем касательную и нормальную составляющие ускорения. По второму закону Ньютона,

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2.$$

Переходя к проекциям сил и ускорения на касательное направление, находим

$$a_{\tau} = g \sin \alpha.$$

Здесь  $\alpha$  – угол наклона вектора скорости к горизонту такой, что

$$\sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{4\pi^2 R^2 + h^2}}.$$

По закону сохранения энергии,

$$m \frac{v^2}{2} = mgH, \text{ и } v = \sqrt{2gH}.$$

Касательная составляющая ускорения постоянна, начальная скорость равна нулю, следовательно, модуль вектора скорости растет со временем по линейному закону. Отсюда для искомого времени получаем

$$T = \frac{v}{a_{\tau}} = \frac{\sqrt{2gH}}{g \sin \alpha} = \sqrt{\frac{2H(4\pi^2 R^2 + h^2)}{gh^2}}.$$

Для определения нормальной составляющей ускорения перейдем в подвижную систему отсчета, поступательно движущуюся относительно лаборатории по вертикали вниз со скоростью  $v \sin \alpha$ . В этой системе бусинка ускоренно движется по окружности радиусом  $R$  со скоростью  $v \cos \alpha$ , при этом нормальная составляющая ускорения бусинки по величине равна  $a_n = (v \cos \alpha)^2 / R$ . Так как ускорение подвижной системы сонаправлено с  $\vec{g}$ , нормальная составляющая ускорения бусинки при переходе в лабораторную систему отсчета не изменится (это следует из правила сложения ускорений).

Из второго закона Ньютона находим составляющие силы, с которой проволока действует на бусинку:

$$N_1 = m \frac{(v \cos \alpha)^2}{R} = mg \frac{2H}{R} \cos^2 \alpha, \quad N_2 = mg \cos \alpha,$$

$$\text{где } \cos \alpha = \frac{2\pi R}{\sqrt{4\pi^2 R^2 + h^2}}.$$

По третьему закону Ньютона бусинка действует на проволоку с



силой  $\vec{F} = -(\vec{N}_1 + \vec{N}_2)$ , величина (модуль) которой равна

$$F = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = mg \frac{2\pi R}{4\pi^2 R^2 + h^2} \sqrt{4\pi^2 R^2 + h^2 + 16\pi^2 H^2}.$$

### Упражнения

1. Сферический воздушный шар радиусом  $R = 5$  м удерживается вертикальной веревкой, его центр находится на высоте  $H = 6$  м над горизонтальной поверхностью. С этой поверхности бросают камень так, что он перелетает шар, почти касаясь его в верхней точке. С какой минимальной скоростью  $v_0$  следует бросать камень и на каком расстоянии  $s$  от центра шара будет находиться в этом случае точка бросания?

*Указание:* ускорение свободного падения у поверхности Земли в этой и последующих задачах равно  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

2. Известно, что спутник, находящийся на орбите, высота которой  $h = 3,6 \cdot 10^4$  км, обращается вокруг Земли за одни сутки и может «висеть» над одной и той же точкой экватора. Допустим, что обсуждается вопрос о запуске на такую же высоту спутника, который будет «висеть» над Санкт-Петербургом. Какую по величине и направлению силу тяги  $\vec{F}$  должен развивать двигатель спутника, чтобы удерживать его на заданной орбите? Масса спутника  $m = 10^3$  кг, Санкт-Петербург находится на широте  $\varphi = 60^\circ$ , радиус Земли  $R = 6,4 \cdot 10^3$  км.

3. По гладкому столу движутся два тела с массами  $m_1$  и  $m_2$ , соединенные легкой нерастяжимой нитью длиной  $L$ . В некоторый момент первое тело останавливается, а скорость второго равна  $v$  и перпендикулярна нити. Найдите силу натяжения нити  $T$ .

4. Однородную цепочку массой  $m$  и длиной  $L$  поместили на гладкую сферическую поверхность радиусом  $R = 4L$  так, что один ее конец закреплен на вершине сферы. Верхний конец цепочки освобождают. Найдите наибольшую величину  $T_{\max}$  силы натяжения цепочки сразу после ее освобождения. *Указание:* для рассматриваемых в задаче углов считайте  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$ .

5. В задаче 6 из текста статьи найдите скорость  $v_2$ , при которой ящик начнет подпрыгивать.

6. Для экономии места въезд на один из высочайших в Японии мостов устроен в виде винтовой линии, обвивающей цилиндр радиусом  $R$ . При движении по такой дороге вектор скорости автомобиля составляет угол  $\alpha$  с горизонтальной плоскостью. Найдите направление и величину суммы сил, действующих на автомобиль массой  $m$ , движущийся по такой дороге с постоянной по величине скоростью  $v$ . Ось винтовой линии вертикальна.

## НЕСКОЛЬКО ЗАДАЧ НА ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

*А. Черноуцан*

В этой статье представлены задачи, отобранные по следующим критериям. Во-первых, при их решении используются подходы и методы, применение которых требует хорошего понимания физической сущности законов сохранения, что является сложным для многих абитуриентов. Во-вторых, преимущество отдавалось задачам, содержащим красивую физическую «изюминку» или подвох, что выделяет их в ряду аналогичных задач. В то же время, уровень сложности предлагаемых задач вполне «абитуриентский» (хотя и из верхнего эшелона), они не претендуют на высокое звание «олимпиадных».

Надеемся, что эта статья позволит вам глубже познакомиться с такой важной и нетривиальной темой, как закон сохранения механической энергии.

В первой группе из четырех задач внимание концентрируется на анализе возможных случаев, соответствующих различным соотношениям между исходными данными. Неумение увидеть скрытые в условии задачи возможности может привести к ошибочным результатам.

**Задача 1.** Груз массой  $m = 1,6$  кг подвешен к потолку на упругом резиновом шнуре жесткостью  $k = 250$  Н/м. Грузу резким толчком сообщают начальную скорость  $v_0 = 1$  м/с, направленную вертикально вверх. На какую максимальную высоту (отсчитывая от начальной точки) поднимется груз?

Наиболее часто встречающаяся ошибка состоит в том, что абитуриенты не обращают внимания на слова про резиновый шнур и решают задачу так, как будто груз висит на пружине. Однако шнур, в отличие от пружины, работает только на растяжение. Если шнур не растягивать, а «сжимать» (сближать его концы), то он теряет форму, изгибается, не оказывая никакого сопротивления.

Давайте и мы начнем решение со случая груза на пружине и посмотрим, не даст ли нам сам ответ (как это часто бывает)

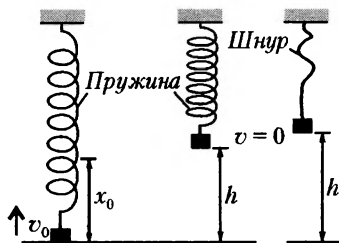


Рис. 1

какую-нибудь подсказку, «сигнал» о том, что что-то не в порядке. Заодно поговорим о важном методическом приеме, помогающем существенно упрощать решение задач с вертикальными пружинами.

Запишем закон сохранения энергии системы, отсчитывая потенциальную энергию тяготения

от начального положения груза (рис.1):

$$\frac{kx_0^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2} = mgh + \frac{k(x_0 - h)^2}{2}.$$

Здесь  $h$  – искомая высота, а  $x_0$  – начальное растяжение пружины (шнура), которое находится из условия равновесия висящего груза:

$$kx_0 - mg = 0.$$

Раскрывая скобки в законе сохранения энергии и подставляя  $x_0$ , приходим к совсем короткому уравнению

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{kh^2}{2}.$$

Заметим, что ускорение силы тяжести  $g$  вообще не вошло в конечное уравнение, как будто поле тяжести отсутствует. В чем причина? Здесь проявилось следующее свойство груза на пружине: если отсчитывать общую потенциальную энергию для равнодействующей силы тяжести и силы упругости от положения равновесия, то она принимает вид  $E_{\text{п}} = ky^2/2$ , где  $y = x - x_0$  – смещение из этого положения. Действительно, равнодействующая сила в положении равновесия равна нулю, а при смещении груза на  $y$  возникает сила  $F_y = -ky$ , равная изменению силы упругости (сила тяжести не меняется). Поскольку сама равнодействующая такая же, как сила упругости, то и потенциальная энергия для нее такая же, как для чистой силы упругости. Это свойство часто используется молча, без всяких пояснений, например – при рассмотрении вертикальных колебаний груза на пружине.

Подставляя численные данные в последнее уравнение, находим искомую высоту:

$$h = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} = 80 \text{ мм}.$$

Вернемся к задаче со шнуром. Казалось бы, полученный ответ как в общем виде, так и в числовом выражении ничем не помогает нам заметить допущенную ошибку. Однако будем внимательны и, заподозрив подвох, проверим, остается ли шнур в *растянутом* состоянии до самого верхнего положения груза. Для этого вычислим начальное растяжение шнура  $x_0$  и сравним его с  $h$ :

$$x_0 = \frac{mg}{k} = 64 \text{ мм} < h = 80 \text{ мм}.$$

Видим, что груз при подъеме проходит точку, после которой шнур теряет свои упругие качества, изгибается, и сила упругости исчезает. Условие исчезновения силы упругости имеет вид

$$v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} > \frac{mg}{k}, \text{ или } v_0 > g \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

В таком случае задачу надо решать заново.

Упрощающий подход с объединением силы тяжести и силы упругости больше не действует (на некотором этапе движения сила упругости исчезает), и закон сохранения энергии следует записать так:

$$\frac{mv_0^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2} = mgh,$$

откуда (с учетом равенства  $x_0 = mg/k$ ) получим окончательный ответ:

$$h = \frac{v_0^2}{2g} + \frac{mg}{2k} = 82 \text{ мм}.$$

**Задача 2.** Груз подвешен к потолку на упругом резиновом шнуре. На груз дважды действовали постоянной силой, направленной вертикально вверх и равной в первом случае  $F_1 = 3mg/4$ , а во втором случае  $F_2 = mg/4$ . Во сколько раз максимальная высота подъема груза (отсчитанная от начальной точки) в первом случае больше, чем во втором?

Решим задачу сначала в предположении, что сила упругости действует все время движения, т.е. как бы мысленно заменим шнур пружиной. Запишем закон сохранения (точнее – изменения) энергии, используя сокращенную запись для полной потенциальной энергии системы (см. задачу 1):

$$Fh = \frac{kh^2}{2} - 0,$$

откуда найдем искомую высоту:

$$h = \frac{2F}{k}.$$

В рамках сделанного предположения отношение высот в обсуждаемых двух случаях равнялось бы отношению внешних сил:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{F_1}{F_2} = 3.$$

Однако, наученные горьким опытом, мы должны проверить, остается ли шнур растянутым до достижения грузом максимальной высоты. Для этого должно выполняться условие  $h < x_0$ , т.е.

$$\frac{2F}{k} < \frac{mg}{k}, \text{ или } F < \frac{mg}{2}.$$

Это условие для второго случая выполняется, поэтому

$$h_2 = \frac{2F_2}{k}.$$

Для первого же случая (рис.2) закон сохранения энергии надо написать заново (поскольку сила упругости на верхнем участке движения не действует, потенциальные энергии силы тяжести и силы упругости надо писать отдельно):

$$F_1 h_1 = mgh_1 - \frac{kx_0^2}{2}.$$

Подставляя  $x_0 = mg/k$ , получим

$$h_1 = \frac{(mg)^2}{2k(mg - F_1)}.$$

Тогда окончательно

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{(mg)^2}{4F_2(mg - F_1)} = 4.$$

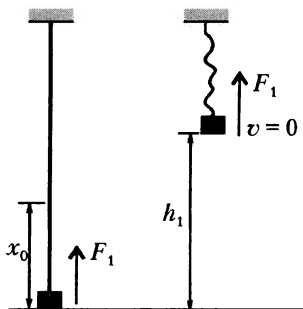


Рис. 2

**Задача 3.** Однородный стержень длиной  $l = 2$  м, двигаясь вдоль своей длины по гладкой горизонтальной поверхности, начинает пересекать границу, за которой поверхность становится шероховатой с коэффициентом трения  $\mu = 0,2$ . Какое расстояние  $s$  проедет стержень с этого момента до остановки, если его начальная скорость  $v_0 = 3$  м/с?

Запишем закон сохранения энергии (теорему о кинетической энергии) в виде

$$A_{\text{тр}} = 0 - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Вычислим работу силы трения  $A_{\text{тр}}$  в предположении, что сила трения в процессе движения все время возрастает, т.е. что

стержень остановится до того, как целиком пересечет границу. В тот момент, когда стержень проехал расстояние  $x$  (рис.3), сила трения, действующая на кусок стержня длиной  $x < l$ , равна

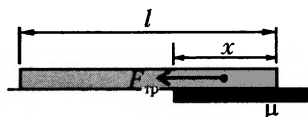


Рис. 3

$$F_{\text{тр}} = \mu mg \frac{x}{l}.$$

Поскольку сила трения представляет собой линейную функцию пройденного расстояния, ее работу можно вычислить по формуле

$$A_{\text{тр}} = -\frac{F_{\text{тр}1} + F_{\text{тр}2}}{2} s = -\frac{0 + \mu mg \frac{s}{l}}{2} s = -\frac{\mu mgs^2}{2l}.$$

Подставив в уравнение закона сохранения энергии, получаем

$$-\frac{\mu mgs^2}{2l} = -\frac{mv_0^2}{2},$$

откуда

$$s = v_0 \sqrt{\frac{l}{\mu g}} = 3 \text{ м}.$$

К сожалению, многие абитуриенты на этом заканчивают решение задачи, не заметив, что полученный ответ не имеет смысла, поскольку пройденное расстояние получилось больше длины стержня, а работа силы трения вычислялась в противоположном предположении. Правильное выражение для работы силы трения в случае  $s > l$  имеет вид

$$A_{\text{тр}} = -\frac{0 + \mu mg}{2} l - \mu mg(s - l).$$

Тогда из закона сохранения энергии получаем

$$s = \frac{l}{2} + \frac{v_0^2}{2\mu g} = 3,25 \text{ м}.$$

Конечно, можно поступить по-другому. Если сразу увидеть, что возможны разные случаи, то начать решение нужно с выяснения того, какой случай реализуется. Например, найти минимальную скорость  $v_1$ , при которой стержень полностью заедет на шероховатую поверхность:

$$0 - \frac{mv_1^2}{2} = -\frac{0 + \mu mg}{2} l,$$

откуда

$$v_1 = \sqrt{\mu g l} = 2 \text{ м/с}.$$

Поскольку  $v_0 > v_1$ , то ясно, что задний конец стержня обязательно пересечет границу.

**Задача 4.** В шар массой  $m_2 = 480 \text{ г}$  попадает пуля массой  $m_1 = 20 \text{ г}$ , летящая со скоростью  $v_1 = 100 \text{ м/с}$  по линии, проходящей через центр шара. Считая, что сила сопротивления движению пули в материале шара постоянна и равна  $F_c = 1650 \text{ Н}$ , найдите конечную скорость шара. Диаметр шара  $d = 5 \text{ см}$ .

Запишем для данного удара законы сохранения импульса и энергии, с учетом перехода механической энергии во внутреннюю за счет работы силы сопротивления:

$$\begin{aligned} m_1 v_1 &= m_1 u_1 + m_2 u_2, \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} &= \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + Q, \\ Q &= F_c d. \end{aligned}$$

Исключая из этих уравнений конечную скорость пули

$$u_1 = v_1 - \frac{m_2}{m_1} u_2,$$

получим для конечной скорости шара  $u_2$  квадратное уравнение

$$\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) u_2^2 - 2v_1 u_2 + \frac{2F_c d}{m_2} = 0.$$

Решение этого уравнения

$$u_2 = \frac{v_1 \pm \sqrt{v_1^2 - 2F_c d(m_1 + m_2)/(m_1 m_2)}}{1 + m_2/m_1}$$

дает два положительных ответа: 2,5 м/с и 5,5 м/с. Какой из них выбрать?

Многие школьники привыкли, что один из ответов обычно получается отрицательным, и заранее отбрасывают решение с минусом перед квадратным корнем. Другие не знают, что делать с двумя положительными корнями, и выбирают наибольший (и получают неверный ответ!). На самом деле, надо вычислить скорость пули в каждом из случаев (используя написанную выше формулу, выражающую  $u_1$  через  $u_2$ ):

$$u_1 = v_1 - \frac{m_2}{m_1} u_2 = \frac{v_1 \mp (m_2/m_1) \sqrt{v_1^2 - 2F_c d(m_1 + m_2)/(m_1 m_2)}}{1 + m_2/m_1}.$$

Видно, что если выбрать верхние знаки в формулах для  $u_2$  и  $u_1$  (плюс для шара и минус для пули), то скорость пули получится *меньше*, чем скорость шара:  $u_1 < u_2$  (в данном конкретном случае  $u_1$  отрицательна и равна  $u_1 = -32$  м/с). Значит, пуля в этом случае оказывается с той же стороны от шара, с которой она подлетала. Это соответствует отскоку пули при ударе назад с потерей энергии  $Q$  (см. далее упражнение 4). Наоборот, если взять нижние знаки (минус для шара и плюс для пули), то скорость пули оказывается *больше*, чем скорость шара (в данном случае  $u_1 = 40$  м/с), что соответствует ситуации, когда пуля пробивает шар насквозь и вылетает с другой стороны. Значит, правильный ответ для скорости шара соответствует *меньшему* корню:  $u_2 = 2,5$  м/с.

В следующей задаче упор делается на выбор правильного условия, определяющего конечное состояние системы.

**Задача 5.** На гладкой горизонтальной плоскости лежат два бруска с массами  $m_1 = 400$  г и  $m_2 = 100$  г, соединенные недеформированной пружиной. Первому бруску сообщают скорость  $v_1 = 10$  м/с в направлении второго бруска. Найдите минимальную скорость этого бруска в процессе дальнейшего движения.

Запишем законы сохранения импульса и энергии системы (рис.4):

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \quad \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} + \frac{kx^2}{2},$$

где  $x$  — деформация пружины. Главное для решения задачи — понять, чем интересующий нас момент, когда скорость бруска массой  $m_1$  минимальна, отличается от всех остальных моментов движения. Для этого надо рассмотреть действующие на первый брусок силы.

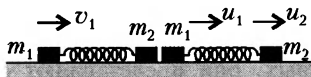


Рис. 4

Как только брусок массой  $m_1$  придет в движение, пружина начнет сжиматься, и на него будет действовать сила упругости, направленная навстречу движению. Предположим, что скорость этого бруска не меняет направления, т.е. что  $u_1$  все время положительна (позже нам придется проверить это предположение). Тогда скорость  $u_1$  будет уменьшаться по модулю до тех пор, пока на брусок действует сжатая пружина. Когда пружина перейдет в растянутое состояние, сила упругости будет направлена по движению, и скорость бруска начнет возрастать. Минимальная скорость соответствует тому моменту, когда пружина



снова (как до начала движения) придет в недеформированное состояние, т.е. когда  $x = 0$ . В этот же момент скорость второго бруска будет максимальна.

Система уравнений в этот момент

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \quad \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$$

совпадает с системой уравнений для центрального упругого удара (т.е. пружина как бы осуществляет растянутый по времени упругий удар). Решение этой задачи хорошо известно, мы приведем его без вывода:

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = 6 \text{ м/с}, \quad u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = 16 \text{ м/с}.$$

Если скорость  $u_2$  всегда положительна, т.е. получен правильный ответ для максимальной скорости второго бруска при любом соотношении масс, то скорость  $u_1$  остается положительной только при условии  $m_1 \geq m_2$ . Если  $m_1 < m_2$ , то в процессе движения скорость первого бруска меняет знак, и ответ для минимальной скорости такой:  $u_1 = 0$ .

Отметим интересное отличие этой задачи от центрального упругого удара, например, двух шаров. Шары после удара перестают взаимодействовать и разлетаются. В нашем же случае пружина, соединяющая бруски, после рассмотренного момента растягивается, первый брусок начинает тормозиться, второй – разгоняться. Через некоторое время скорость первого бруска достигнет максимального значения  $u'_1$ , а скорость второго – минимального  $u'_2$ . Пружина в этот момент опять не деформирована, т.е. эти скорости подчиняются той же самой системе уравнений. Поскольку скорости должны отличаться от найденных, они представляют собой второе решение этой системы, которое при решении задачи о центральном упругом ударе отбрасывают:  $u'_1 = v_1$ ,  $u'_2 = 0$ .

Последние две задачи связаны с движением по окружности. Первая из них иллюстрирует, как можно описать движение модельного твердого тела, состоящего из точечных масс, закрепленных на невесомом стержне. Вторая показывает, как использовать движущиеся системы отсчета в задачах на законы сохранения при движении по окружности.

**Задача 6.** *Невесомый стержень, на концах которого закреплены два груза массой  $m = 0,5$  кг каждый, может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси. Ось делит стержень в*

отношении 1:3. Стержень приводят в горизонтальное положение и отпускают. С какой силой он действует на ось в вертикальном положении?

Если в вертикальном положении сила натяжения нижней части стержня  $T_1$ , а верхней  $T_2$ , то действующая на ось сила равна (рис.5)

$$F = T_1 - T_2.$$

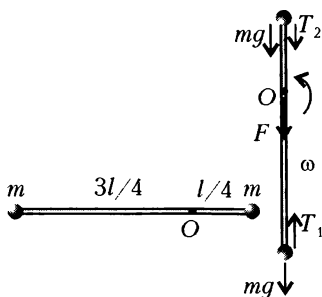


Рис. 5

Силы натяжения стержней найдем из выражений второго закона Ньютона для грузов:

$$T_1 - mg = m\omega^2 \cdot 0,75l,$$

$$T_2 + mg = m\omega^2 \cdot 0,25l,$$

где  $l$  – длина стержня. Отметим, что написанные формулы годятся и в том случае, когда верхняя часть стержня находится в сжатом состоянии ( $T_2 < 0$ ). Угловую скорость вращения  $\omega$  найдем из закона сохранения энергии системы (уровень отсчета потенциальной энергии примем в точке подвеса):

$$0 = mg \cdot 0,25l - mg \cdot 0,75l + \frac{m(0,25l\omega)^2}{2} + \frac{m(0,75l\omega)^2}{2},$$

откуда

$$\omega^2 = 1,6 \frac{g}{l}.$$

Окончательно получаем

$$F = T_1 - T_2 = 2mg + 0,5m\omega^2 l = 2,8mg = 14 \text{ Н}.$$

**Задача 7.** Демонстрационная установка состоит из наклонной плоскости, плавно переходящей в «мертвую петлю» радиусом  $R$  (рис.6). Установка закреплена на тележке, стоящей на горизонтальной плоскости. Груз массой  $m_1 = 0,2$  кг съезжает с высоты  $h = 3R$ , отсчитанной от нижней точки петли. Чему равна сила давления груза на поверхность в верхней точке петли? Трением пренебречь. Масса  $m_2$  установки вместе с тележкой в 4 раза больше массы груза.

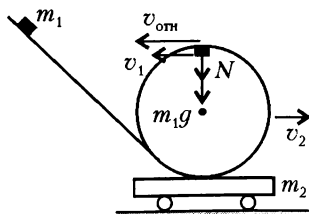


Рис. 6

Чтобы найти силу давления, точнее – нормальную силу реакции  $N$ , надо записать второй закон Ньютона для верхней точки петли. Но тут возникает проблема: в системе отсчета, связанной с землей, траектория движения груза отлична от окружности, поскольку тележка с установкой движется с переменной скоростью. Это значит, что радиус кривизны траектории груза может отличаться от  $R$ . Выход состоит в том, чтобы записать второй закон Ньютона в системе отсчета, связанной с тележкой, где движение происходит по окружности радиусом  $R$ . Однако есть возражение: тележка под действием силы давления груза движется с ускорением, а значит, связанная с ней система отсчета не является инерциальной. Это возражение справедливо для всех моментов движения, кроме тех, когда груз проходит нижнюю и верхнюю точки петли. В эти моменты сила давления направлена вертикально и ускорение тележки равно нулю, следовательно, силы инерции, которые действуют все остальное время, обращаются в ноль.

Запишем второй закон Ньютона для верхней точки петли:

$$m_1 g + N = \frac{m_1 v_{\text{отн}}^2}{R}.$$

Здесь  $v_{\text{отн}}$  – скорость груза относительно тележки, равная

$$v_{\text{отн}} = v_1 - v_2,$$

где  $v_1$  и  $v_2$  – проекции скоростей груза и тележки на горизонтальную ось. Эти скорости мы найдем из законов сохранения импульса и энергии:

$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2, \quad m_1 g h = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + m_1 g \cdot 2R,$$

откуда

$$v_1^2 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} g (h - 2R) = \frac{8}{5} g R,$$

и

$$v_{\text{отн}} = v_1 - v_2 = v_1 + \frac{m_1}{m_2} v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} v_1 = \frac{5}{4} v_1.$$

Подставляя  $v_{\text{отн}}$  во второй закон Ньютона, получим

$$N = \frac{m_1 v_{\text{отн}}^2}{R} - m_1 g = \frac{25}{16} \frac{m_1 v_1^2}{R} - m_1 g = \frac{3}{2} m_1 g = 3 \text{ Н}.$$

### Упражнения

1. Груз массой 5 кг подвешен к потолку на упругом резиновом шнуре жесткостью 500 Н/м. Грузу дважды сообщают начальную

скорость, направленную вертикально вверх. В первом случае эта скорость  $0,5 \text{ м/с}$ , во втором  $2 \text{ м/с}$ . Во сколько раз максимальная высота подъема груза (отсчитанная от начальной точки) во втором случае больше, чем в первом?

2. Груз массой  $2 \text{ кг}$  подвешен к потолку на упругом резиновом шнуре. На груз дважды действовали постоянной силой  $15 \text{ Н}$ , направленной в первом случае вертикально вверх, а во втором случае – вертикально вниз. На сколько процентов расстояние, пройденное грузом до остановки, во втором случае меньше, чем в первом?

3. Однородный стержень длиной  $2 \text{ м}$ , двигаясь вдоль своей длины по шероховатой горизонтальной поверхности, начинает пересекать границу, за которой поверхность становится гладкой. Скорость стержня в этот момент  $1,6 \text{ м/с}$ . Какое расстояние (в см) проедет стержень от этого момента до остановки, если коэффициент трения о шероховатую поверхность  $0,2$ ?

4. В шар массой  $480 \text{ г}$  попадает пуля массой  $20 \text{ г}$ , летящая со скоростью  $100 \text{ м/с}$  по линии, проходящей через центр шара. После удара пуля отскакивает назад, при этом в процессе удара выделяется  $90 \text{ Дж}$  тепла. Найдите конечную скорость шара.

5. Невесомый стержень, на конце которого закреплен груз массой  $3 \text{ кг}$ , а в середине – груз массой  $4 \text{ кг}$ , может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его свободный конец. Стержень приводят в верхнее положение и отпускают. С какой силой он будет действовать на ось в момент прохождения нижнего положения?

6. Два бруска с массами  $0,5 \text{ кг}$  и  $1 \text{ кг}$ , лежащие на гладком полу, соединены пружиной жесткостью  $900 \text{ Н/м}$ . Вначале первый брусок упирается в стену, пружина не деформирована и перпендикулярна стене. Второй брусок перемещают на  $10 \text{ см}$  в сторону первого и отпускают. Найдите максимальную скорость первого бруска в процессе дальнейшего движения.

7. Брусок лежит на гладкой горизонтальной плоскости. На бруске закреплен штатив, к которому на легкой нити подвешен груз массой  $0,1 \text{ кг}$ . Масса бруска вместе со штативом равна массе груза. Вначале нить с грузом удерживают в горизонтальном положении, затем отпускают. Найдите силу натяжения нити в момент, когда груз находится в нижней точке.

## ЦЕНТР МАСС МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

*В.Можаев*

Рассмотрим произвольную механическую систему твердых тел с заданным взаимным расположением в пространстве и с известными массами. Поступательное движение такой системы под действием внешних сил эквивалентно движению материальной точки, имеющей массу, равную массе системы, и находящейся под воздействием результирующей силы всех внешних сил. Геометрическую точку, в которой располагается эта материальная точка, называют центром инерции или центром масс данной системы тел. Для произвольной неподвижной прямоугольной системы координат (ее называют также лабораторной системой отсчета) координаты центра масс определяются следующими формулами:

$$x_{\text{ц}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i, \quad y_{\text{ц}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i y_i, \quad z_{\text{ц}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i z_i,$$

где  $m_i, x_i, y_i, z_i$  — массы и координаты центров масс тел, входящих в систему, а  $M$  — суммарная масса всех тел.

Если сумма внешних сил, действующих на систему тел, равна нулю, то центр масс остается неподвижным или движется прямолинейно с некоторой постоянной скоростью (в зависимости от предыстории). В этом случае удобно рассматривать движение тел под действием внутренних сил в инерциальной системе отсчета, связанной с центром масс. В такой системе отсчета импульс системы тел равен нулю и будет оставаться нулевым при любых взаимодействиях между телами системы.

Перейдем к разбору конкретных задач.

**Задача 1.** *Определите, какую часть своей кинетической энергии теряет частица массой  $m_1$  при упругом лобовом столкновении с неподвижной частицей массой  $m_2$ .*

Пусть скорость налетающей частицы массой  $m_1$  равна  $v_1$ , тогда скорость движения центра масс будет равна

$$u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Перейдем в систему отсчета, связанную с центром масс нашей системы. В этой системе скорость частицы массой  $m_1$  равна

$$v_{1ц} = v_1 - u = \frac{m_2 v_1}{m_1 + m_2},$$

а скорость частицы массой  $m_2$  составляет

$$v_{2ц} = -u = -\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

За положительное направление выбрано направление скорости первой частицы. Получается, что в системе центра масс мы имеем уже другую ситуацию: обе частицы движутся навстречу друг другу с равными по величине импульсами

$$p = \frac{m_1 m_2 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Когда частицы встретятся, возможны три варианта:

1) частицы не провзаимодействуют и пролетят, сохраняя свои скорости и импульсы;

2) произойдет нецентральный упругий удар, при котором частицы разлетятся, также сохраняя свои скорости и импульсы, но уже лежащие на прямой, проходящей по одному из диаметров сферы с центром в точке столкновения;

3) произойдет центральный упругий удар, при котором скорости и импульсы частиц также остаются неизменными по величине, но меняют свои направления на противоположные.

Найдем скорости наших частиц после центрального удара, но уже снова в неподвижной системе координат, где скорость частицы массой  $m_1$  до удара была  $v_1$ . После удара первая частица будет двигаться со скоростью

$$v'_1 = u - v_{1ц} = \frac{(m_1 - m_2) v_1}{m_1 + m_2},$$

а вторая – со скоростью

$$v'_2 = u - v_{2ц} = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

До удара кинетическая энергия налетающей частицы в неподвижной системе координат была

$$E_k = \frac{m_1 v_1^2}{2},$$

а после удара стала

$$E'_k = \frac{m_1 (v'_1)^2}{2} = \frac{m_1 (m_1 - m_2)^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)^2}.$$

Потеря кинетической энергии равна

$$\Delta E_k = E_k - E'_k = \frac{2m_1^2 m_2 v_1^2}{(m_1 + m_2)^2},$$

что составляет от начальной энергии долю

$$\alpha = \frac{\Delta E_k}{E_k} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{4m_1/m_2}{(1 + m_1/m_2)^2}.$$

Зависимость  $\alpha$  от отношения  $m_1/m_2$  изображена на рисунке 1. При  $m_1 = m_2$   $\alpha = 1$ , т.е. происходит полная потеря энергии.

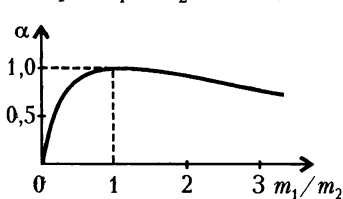


Рис. 1

При уменьшении отношения  $m_1/m_2$   $\alpha$  уменьшается и при  $m_1/m_2 \rightarrow 0$  доля теряемой энергии также стремится к нулю. Вот почему, например, в ядерных реакторах для замедления нейтронов используется рассеяние их на ядрах легких атомов – дейтерия, углерода. Для дейтерия, ядро которого состоит из протона и нейтрона,  $m_1/m_2 = 0,5$  и  $\alpha = 0,89$ . В случае же ядра атома углерода  $m_1/m_2 = 1/12$  и  $\alpha = 0,28$ .

**Задача 2.** Две частицы, массы которых  $m_1$  и  $m_2$  ( $m_1 > m_2$ ), движутся навстречу друг другу вдоль одной прямой с одинаковыми скоростями. После упругого столкновения тяжелая частица отклоняется от направления своего первоначального движения на угол  $\alpha = 30^\circ$  в лабораторной системе отсчета или на угол  $\beta = 60^\circ$  в системе центра масс. Определите отношение  $m_1/m_2$ .

Обозначим начальные скорости частиц в лабораторной системе координат через  $v_0$ . Тогда скорость движения центра масс нашей системы частиц будет

$$u = \frac{(m_1 - m_2)v_0}{m_1 + m_2}$$

– здесь за положительное направление выбрано направление скорости частицы массой  $m_1$ .

Перейдем в систему координат, связанную с центром масс. В этой системе скорость частицы массой  $m_1$  до столкновения равна

$$v_{1ц} = v_0 - u = \frac{2m_2 v_0}{m_1 + m_2}.$$

Аналогичная скорость частицы массой  $m_2$  составляет

$$v_{2ц} = -(v_0 + u) = -\frac{2m_1 v_0}{m_1 + m_2}.$$

Импульсы частиц в этой системе координат равны по величине:

$$p_{1ц} = p_{2ц} = \frac{2m_1 m_2 v_0}{m_1 + m_2}$$

и направлены в противоположные стороны как до соударения, так и после него. Но после соударения импульсы частиц лежат на прямой, которая составляет угол  $\beta$  с направлением первоначального движения.

На рисунке 2 изображена векторная диаграмма импульсов для частицы массой  $m_1$ . На этой диаграмме прямая  $AA'$  соответствует направлению первоначального движения частиц. Отрезок  $OB$  равен импульсу частицы массой  $m_1$  в системе центра масс после столкновения, отрезок  $OC$  равен импульсу этой же частицы тоже после соударения, но уже в лабораторной системе отсчета. А вот отрезок  $BC$  – это импульс, который добавляется при переходе из системы центра масс в лабораторную систему, величина этого импульса равна

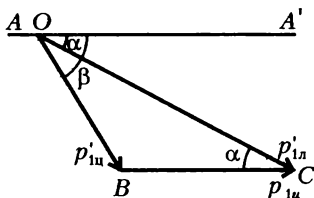


Рис. 2

$$p_{1л} = m_1 u = \frac{m_1 (m_1 - m_2) v_0}{m_1 + m_2}.$$

При заданных значениях углов  $\alpha$  и  $\beta$  треугольник  $OBC$  оказывается равнобедренным, поскольку  $\angle BOC = \beta - \alpha = 30^\circ$ , а  $\angle BCO = \alpha = 30^\circ$  ( $BC \parallel AA'$ ). Из этого следует, что  $OB = BC$ , или

$$\frac{2m_1 m_2 v_0}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 (m_1 - m_2) v_0}{m_1 + m_2},$$

откуда получаем

$$\frac{m_1}{m_2} = 3.$$

**Задача 3.** На прямолинейную горизонтальную спицу насажены два шарика, которые могут скользить по ней без трения (рис. 3). К шарiku массой  $m$  прикреплена легкая пружина жесткостью  $k$ . Эта система неподвижна, а шарик массой  $2m$  движется со скоростью  $v_0$ . Определите скорость шарика массой  $2m$  после отрыва от пружины

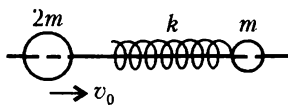


Рис. 3



*и время контакта этого шарика с пружиной. Радиусы шаров много меньше длины пружины.*

Скорость центра масс в лабораторной системе координат составляет

$$u = \frac{2}{3} v_0.$$

Перейдем в систему отсчета, связанную с центром масс. Скорость шарика массой  $2m$  до взаимодействия с пружиной в этой системе равна

$$v_{1ц} = v_0 - u = \frac{v_0}{3},$$

а скорость шарика массой  $m$  направлена в противоположную сторону и равна по величине

$$v_{2ц} = u = \frac{2}{3} v_0.$$

Как только шарик массой  $2m$  достигнет пружины, скорости шариков начнут уменьшаться, а пружина будет сжиматься. В некоторый момент, когда вся кинетическая энергия шариков перейдет в потенциальную энергию упругой деформации пружины, шарик остановится, а затем начнут ускоряться в противоположных направлениях. Когда пружина примет свою первоначальную длину, шарик массой  $2m$  оторвется от пружины и будет иметь скорость, равную  $v_{1ц}$  и направленную в другую сторону по отношению к первоначальной.

Но это – скорость в системе центра масс, а нам нужно найти скорость этого шарика в лабораторной системе отсчета. Для этого перейдем обратно в лабораторную систему отсчета. В этой системе скорость шарика массой  $2m$ , очевидно, будет равна

$$v_{1л} = u - v_{1ц} = \frac{v_0}{3}.$$

Относительная потеря кинетической энергии шарика составит

$$\alpha = \frac{v_0^2 - v_{1л}^2}{v_0^2} = \frac{8}{9}.$$

Для проверки воспользуемся результатом, полученным в задаче 1:

$$\alpha = \frac{4 m_1 / m_2}{(1 + m_1 / m_2)^2} = \frac{8}{9}.$$

Это совпадение закономерно, поскольку данная задача является частным случаем задачи 1 при  $m_1 / m_2 = 2$ .

Для ответа на второй вопрос заметим, что когда шарик массой  $2m$  находится в контакте с пружиной, ситуация эквивалентна колебаниям шарика на горизонтально расположенной пружине, один конец которой закреплен. Закрепленным концом является центр масс, который остается неподвижным в системе отсчета, связанной с центром масс. Если длина нашей пружины  $l$ , то длина эквивалентной пружины составляет

$$l_{\text{экв}} = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}.$$

Теперь нужно сообразить, чему будет равна жесткость пружины длины  $l_{\text{экв}}$ , если жесткость исходной пружины  $k$ . Это право мы предоставляем читателю, а сами напомним готовый результат:

$$k_{\text{экв}} = \frac{lk}{l_{\text{экв}}} = \frac{(m_1 + m_2)k}{m_2} = 3k.$$

Очевидно, что время контакта шарика массой  $2m$  с пружиной равно половине периода гармонических колебаний шарика на эквивалентной пружине:

$$\tau = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k_{\text{экв}}}} = \pi \sqrt{\frac{2m}{3k}}.$$

**Задача 4.** Клин массой  $2m$  с углом наклона к горизонту  $\alpha$  ( $\cos \alpha = 2/3$ ) находится на гладкой горизонтальной поверхности стола (рис. 4). Через блок, укрепленный на вершине клина, перекинута легкая нить, связывающая грузы массами  $m$  и  $3m$ . Груз массой  $3m$  может скользить вдоль вертикальной направляющей АВ, закрепленной на клине. Этот груз вначале удерживают неподвижно на расстоянии  $H = 27$  см от стола, а затем отпускают. На какое расстояние сместится клин к моменту касания груза массой  $3m$  стола? Массами блока и направляющей АВ пренебречь.

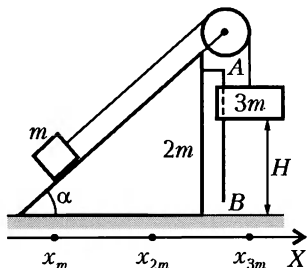


Рис. 4

После того как отпустили груз массой  $3m$ , на нашу систему тел в горизонтальном направлении (ось  $X$ ) никакие внешние силы не действуют, поэтому горизонтальная координата центра масс системы будет оставаться неизменной. Пусть в произвольный момент времени (после освобождения груза массой  $3m$ ) горизонтальные координаты центров масс трех тел будут таки-

ми:  $x_m$  – координата груза массой  $m$ ,  $x_{2m}$  – координата клина,  $x_{3m}$  – координата груза массой  $3m$  (начало отсчета – произвольное). Тогда горизонтальная координата центра масс системы будет равна

$$x_{\text{ц}} = \frac{mx_m + 2mx_{2m} + 3mx_{3m}}{m + 2m + 3m}.$$

Поскольку величина  $x_{\text{ц}}$  остается постоянной, можно записать

$$x_m + 2x_{2m} + 3x_{3m} = \text{const}.$$

За время падения груза массой  $3m$  происходит изменение всех трех координат, причем эти изменения будут связаны между собой соотношением

$$\Delta x_m + 2\Delta x_{2m} + 3\Delta x_{3m} = 0,$$

или, так как  $\Delta x_{2m} = \Delta x_{3m}$ ,

$$\Delta x_m + 5\Delta x_{2m} = 0.$$

Опускание груза массой  $3m$  на величину  $H$  приводит к перемещению груза массой  $m$  вдоль наклонной плоскости также на  $H$ , а вдоль оси  $X$  – на  $H \cos \alpha$ . Но это – перемещение относительно клина, а полное горизонтальное перемещение груза массой  $m$  будет равно

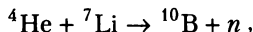
$$\Delta x_m = H \cos \alpha + \Delta x_{2m}.$$

Тогда, с учетом соотношения между  $\Delta x_m$  и  $\Delta x_{2m}$ , для перемещения клина получим

$$\Delta x_{2m} = -\frac{H \cos \alpha}{6} = -\frac{H}{9} = -3 \text{ см}.$$

Знак «минус» означает, что клин сместится влево.

**Задача 5.** Определите минимальное значение кинетической энергии  $\alpha$ -частицы, необходимое для осуществления реакции



если реакция идет с поглощением энергии  $Q = 2,85 \text{ МэВ}$ . Ядро лития неподвижно.

До реакции мы имеем  $\alpha$ -частицу, или ядро атома гелия, и ядро лития, а после реакции образуются ядро бора и нейтрон. Если мы подсчитаем суммарные энергии покоя частиц до реакции и после реакции, то увидим, что энергия покоя ядра бора и нейтрона больше, чем энергия покоя  $\alpha$ -частицы и ядра лития. Эта разность как раз и равна поглощаемой энергии  $Q$  при данной

реакции. Такие ядерные реакции, проходящие с поглощением энергии, называют эндотермическими реакциями. Реакции, идущие, наоборот, с выделением энергии, называют экзотермическими. Отсюда понятно, что если исходные частицы неподвижны, то эндотермическая реакция не пойдет. Значит, налетающая на мишень частица должна обладать некоторой минимальной энергией, при которой начнется реакция. Величину этой энергии называют пороговой.

Наиболее удобно рассмотреть процесс неупругого взаимодействия частиц в системе отсчета, связанной с центром масс системы. Обозначим скорость  $\alpha$ -частицы в лабораторной системе отсчета через  $v_\alpha$ . Тогда скорость движения центра масс равна

$$u = \frac{m_\alpha v_\alpha}{m_\alpha + m_{\text{Li}}},$$

где  $m_\alpha$  и  $m_{\text{Li}}$  — массы  $\alpha$ -частицы и ядра лития. Скорость  $\alpha$ -частицы в системе центра масс составляет

$$v_{\alpha\text{ц}} = v_\alpha - u = \frac{m_{\text{Li}} v_\alpha}{m_\alpha + m_{\text{Li}}}$$

— здесь за положительное направление выбрано направление скорости  $\alpha$ -частицы в лабораторной системе отсчета. Скорость ядра лития в системе центра масс равна

$$v_{\text{Лиц}} = -u = -\frac{m_\alpha v_\alpha}{m_\alpha + m_{\text{Li}}}.$$

В этой системе отсчета при пороговой скорости  $\alpha$ -частицы образовавшееся ядро бора и нейтрон должны покоиться. Запишем закон сохранения полной энергии до реакции и после реакции:

$$m_\alpha c^2 + \frac{m_\alpha v_{\alpha\text{ц}}^2}{2} + m_{\text{Li}} c^2 + \frac{m_{\text{Li}} v_{\text{Лиц}}^2}{2} = m_{\text{B}} c^2 + m_n c^2.$$

— энергии частиц здесь записаны для нерелятивистского случая. Подставляя в это уравнения выражения для  $v_{\alpha\text{ц}}$  и  $v_{\text{Лиц}}$  и учитывая, что

$$m_{\text{B}} c^2 + m_n c^2 - (m_\alpha c^2 + m_{\text{Li}} c^2) = Q,$$

получим

$$\frac{m_\alpha m_{\text{Li}} v_\alpha^2}{2(m_\alpha + m_{\text{Li}})} = Q.$$

Отсюда находим минимальную кинетическую энергию  $\alpha$ -части-

цы в лабораторной системе отсчета:

$$E_k = \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} = \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_{\text{Li}}}\right) Q = 4,48 \text{ МэВ}.$$

### Упражнения

1. Вдоль прямолинейной горизонтальной спицы могут скользить без трения две муфты. Муфта массой  $m$  с прикрепленной к ней легкой пружиной жесткостью  $k$  движется со скоростью  $v_0$ , а муфта массой  $4m$  покоится (рис.5). Определите скорость муфты массой  $4m$  после ее отрыва от пружины и время контакта этой муфты с пружиной. Размеры муфт много меньше длины пружины.

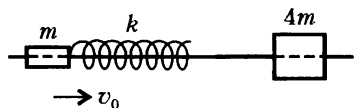


Рис. 5

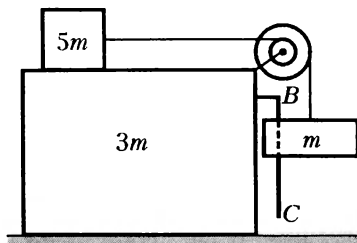
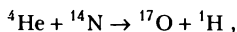


Рис. 6

2. На гладкой горизонтальной поверхности стола находится брусок в форме прямоугольного параллелепипеда, на котором укреплены ступенчатый блок с радиусами шкивов  $r$  и  $R$  ( $R = 4r$ ) и вертикальная штанга  $BC$  (рис.6). На шкивы намотаны легкие нити, прикрепленные к грузам с массами  $m$  и  $5m$ . Груз массой  $m$  может скользить вдоль штанги  $BC$ . Вначале груз массой  $5m$  удерживают в покое, а затем отпускают. К моменту удара груза массой  $m$  о стол другой груз не достигает блока, а брусок за это время смещается на расстояние  $s = 2,5$  см. На каком расстоянии от стола находился груз массой  $m$  вначале? Массами блока и штанги пренебречь.

3. Движущаяся частица претерпевает упругое столкновение с покоящейся частицей такой же массы. Докажите, что после столкновения, если оно не было лобовым, частицы разлетятся под прямым углом друг к другу.

4. Какова кинетическая энергия  $\alpha$ -частицы, если при попадании в ядро азота  $^{14}\text{N}$  происходит реакция



сопровождающаяся поглощением энергии  $Q = 1$  МэВ, а образовавшийся протон покоится в лабораторной системе отсчета?

## РАБОТА ГАЗА ПРИ ПЕРЕХОДЕ ИЗ НАЧАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ В КОНЕЧНОЕ

*В.Можаев*

Бесконечно малая работа  $\delta A$ , совершаемая газом при бесконечно малом квазистатическом расширении, в котором его объем увеличивается на  $dV$ , равна

$$\delta A = p dV, \quad (1)$$

где  $p$  – внутренне давление газа. В случае квазистатических процессов, когда любое состояние газа является равновесным, внутреннее давление  $p$  равно внешнему давлению. Только тогда состояние газа может быть описано двумя параметрами  $p$  и  $V$  и только тогда имеет смысл формула (1).

Квазистатические процессы, в строгом смысле этого слова, никогда не реализуются в природе, но к ним можно подойти сколь угодно близко. Многие реальные процессы можно считать приблизительно квазистатическими с той или иной степенью приближения.

Чтобы от элементарной работы  $\delta A$  перейти к работе  $A$  для конечного процесса, например при переходе из начального состояния газа с объемом  $V_1$  в конечное состояние с объемом  $V_2$ , надо просуммировать элементарные работы, или вычислить интеграл:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (2)$$

Такое вычисление возможно только тогда, когда давление является определенной функцией объема. Между тем, согласно уравнению состояния идеального газа, давление  $p$  зависит не только от  $V$ , но и от температуры  $T$ . Меняя в ходе процесса различным образом температуру газа, можно перевести его из начального состояния в конечное бесчисленным количеством способов. Каждому из этих способов соответствует своя функция  $p = p(V)$  и свое значение интеграла в формуле (2). Таким образом, работа  $A$  газа не определяется заданием его начального

и конечного состояний. Ее величина зависит от способа (или пути) перехода газа из начального состояния в конечное.

Для графического представления работы обычно используется координатная плоскость  $pV$ . Состояние газа на такой плоскости задается точкой, причем по горизонтальной оси откладывается объем  $V$ , а по вертикальной – давление  $p$ . Когда газ совершает квазистатический процесс, точка, изображающая его состояние, описывает на плоскости  $pV$  непрерывную линию.

Пусть газ квазистатически переходит из состояния 1 в состояние 2 вдоль кривой 1M2 (рис.1). Эта кривая соответствует

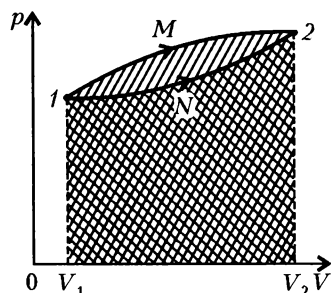


Рис. 1

определенной зависимости давления от объема и однозначно определяет работу газа – она численно равна площади криволинейной трапеции 1M2V<sub>2</sub>V<sub>1</sub>. Если газ заставить переходить из того же начального в то же конечное состояние вдоль другой кривой, например 1N2, то соответствующая работа изобразится другой площадью, а именно 1N2V<sub>2</sub>V<sub>1</sub>.

Если газ обратимым путем переходит из состояния 2 в состояние 1 вдоль кривой 2M1 или 2N1, то, очевидно, работа численно равна тем же площадям, но со знаком минус. На математическом языке это означает, что в этом случае газ совершил отрицательную работу, а с физической точки зрения – что не газ совершил работу, а над газом была совершена работа внешними силами.

А теперь перейдем к разбору конкретных задач.

**Задача 1.** Моль идеального газа совершает круговой процесс (замкнутый цикл), изображенный на рисунке 2. Участок 1–2

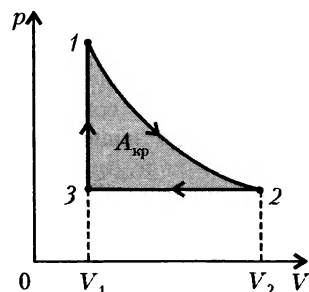


Рис. 2

– изотерма при температуре  $T_1$ , процесс 2–3 – изобара, переход 3–1 – изохора. Отношение объемов  $V_2/V_1 = \alpha$ . Определите: 1) работу газа на каждом участке; 2) работу, совершенную газом в круговом процессе.

На участке 1–2 связь между давлением газа  $p$  и объемом  $V$  имеет вид

$$p = \frac{RT_1}{V},$$

где  $R$  – универсальная газовая по-

стоянная. Работа газа в этом процессе, согласно формуле (2), равна

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = RT_1 \ln \alpha.$$

Поскольку  $\alpha > 1$ , то  $A_{12} > 0$ , т.е. газ совершает работу.

На изобаре 2-3 давление газа остается неизменным:

$$p = \frac{RT_1}{V_2},$$

а работа равна

$$A_{23} = \frac{RT_1}{V_2} \int_{V_1}^{V_2} dV = RT_1 \left( \frac{V_1 - V_2}{V_2} \right) = -RT_1 \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha} \right).$$

Получается, что  $A_{23} < 0$ , т.е. над газом совершается работа.

На изохоре 3-1 объем газа не изменяется, т.е.  $dV = 0$ , поэтому работа равна нулю:

$$A_{31} = 0.$$

В этом случае ни газ, ни над газом работа не совершается.

Очевидно, что работа газа в данном круговом процессе будет равна

$$A_{кр} = A_{12} + A_{23} + A_{31} = RT_1 \left( \ln \alpha - \frac{\alpha - 1}{\alpha} \right).$$

На рисунке 2 эта работа численно равна площади фигуры 1-2-3.

**Задача 2.** Моль гелия расширяется из начального состояния 1 до конечного состояния 3 в двух процессах (рис. 3). Сначала расширение идет в процессе 1-2 с постоянной теплоемкостью  $C = \frac{3}{4}R$  ( $R$  — универсальная газовая постоянная). Затем газ расширяется в процессе 2-3, когда его давление  $p$  прямо пропорционально объему  $V$ . Найдите работу, совершенную газом в процессе 1-2, если в процессе 2-3 он совершил работу  $A$ . Температуры начального (1) и конечного (3) состояний равны.

Поскольку температуры газа в начальном и конечном состояниях одинаковы, переход из состояния 1 в состояние 3 происходит с сохранением внутренней энергии газа. По

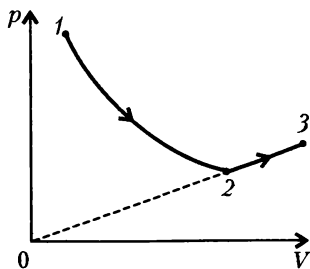


Рис. 3



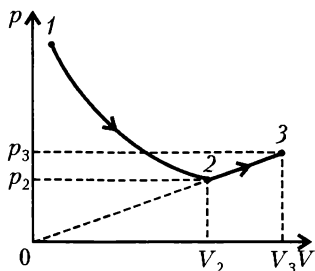


Рис. 4

первому началу термодинамики, в этом случае суммарное подведенное к газу количество теплоты полностью идет на работу, совершенную газом. Воспользуемся этим обстоятельством и найдем количество теплоты, подведенное к газу на участках 1-2 и 2-3.

Обозначим состояние газа в точке 3 через  $p_3$ ,  $V_3$  и  $T_3$ , а в точке 2 — через  $p_2$ ,  $V_2$  и  $T_2$ . Работу газа  $A$  на участке 2-3 выразим через площадь трапеции  $23V_3V_2$  (рис.4):

$$A = \frac{1}{2}(p_3 + p_2)(V_3 - V_2).$$

Из подобия треугольников  $03V_3$  и  $02V_2$  можно записать

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{V_3}{V_2}.$$

Учитывая, что  $p_3V_3 = RT_3$  и  $p_2V_2 = RT_2$ , из совместного решения предыдущих двух уравнений найдем

$$T_3 - T_2 = \frac{2A}{R}.$$

Теперь мы можем записать подведенное к газу количество теплоты на участке 1-2:

$$Q_{12} = C(T_2 - T_3) = -\frac{2CA}{R}$$

и на участке 2-3:

$$Q_{23} = C_V(T_3 - T_2) + A = \frac{2C_V A}{R} + A,$$

где  $C_V = \frac{3}{2}R$  — молярная теплоемкость гелия при постоянном объеме.

В соответствии с первым началом термодинамики,

$$Q_{12} + Q_{23} = A_{12} + A,$$

где  $A_{12}$  — искомая работа газа на участке 1-2. Тогда окончательно получим

$$A_{12} = Q_{12} + Q_{23} - A = \frac{2(C_V - C)A}{R} = \frac{3}{2}A.$$

**Задача 3.** На рисунке 5 показан круговой процесс для  $\nu$  молей гелия, состоящий из двух участков линейной зависимости давления  $p$  от объема  $V$  и одной изобары. Известно, что на изобаре 3–1 над газом была совершена работа  $A$  ( $A > 0$ ), а температура газа уменьшилась в  $\alpha = 4$  раза. Состояния 2 и 3 принадлежат одной изотерме.

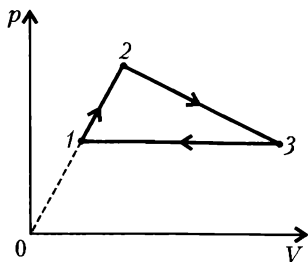


Рис. 5

Точки 1 и 2 на диаграмме  $pV$  лежат на прямой, проходящей через начало координат. Определите: 1) температуру газа в точке 1; 2) работу газа за цикл.

Обозначим температуру гелия в точке 1 через  $T_1$ , тогда температура гелия в точке 3 будет  $T_3 = \alpha T_1$ . Работа над газом на изобаре равна

$$A = p_1(V_3 - V_1) = \nu R(T_3 - T_1) = \nu R(\alpha - 1)T_1.$$

Отсюда

$$T_1 = \frac{A}{\nu R(\alpha - 1)} = \frac{A}{3\nu R}.$$

Перейдем ко второму вопросу. Работу за цикл  $A_{\text{ц}}$  будем искать через площадь треугольника 123:

$$A_{\text{ц}} = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_3 - V_1).$$

Для изобарического процесса  $V \sim T$ , поэтому

$$V_3 - V_1 = V_1(\alpha - 1).$$

Поскольку точки 1 и 2 лежат на прямой, проходящей через начало координат, то

$$p_2 = \frac{V_2}{V_1} p_1.$$

С другой стороны, точки 2 и 3 лежат на изотерме, поэтому

$$p_2 V_2 = p_3 V_3.$$

Учитывая, что  $p_1 = p_3$ , находим

$$p_2 = \sqrt{\frac{V_3}{V_1}} p_1 = \sqrt{\alpha} p_1.$$

После подстановки в выражение для работы за цикл получим

$$A_{\text{ц}} = \frac{1}{2} p_1 V_1 (\sqrt{\alpha} - 1)(\alpha - 1) = \\ = \frac{1}{2} \nu R T_1 (\sqrt{\alpha} - 1)(\alpha - 1) = \frac{(\sqrt{\alpha} - 1) A}{2} = \frac{A}{2}.$$

**Задача 4.** Моль гелия совершает работу  $A$  в замкнутом цикле (рис.6), состоящем из адиабаты 1-2, изотермы 2-3 и изобары 3-1. Найдите работу, совершенную гелием в изотермическом процессе, если разность температур между максимальной и минимальной в цикле равна  $\Delta T$ .

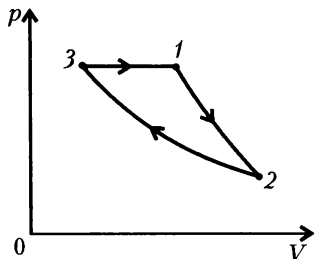


Рис. 6

Очевидно, что максимальная температура гелия в цикле будет в точке 1. Обозначим эту температуру через  $T_1$ . Минимальная температура газа будет на изотерме 2-3, обозначим ее через  $T_{23}$ . Согласно условию задачи,

$$T_1 - T_{23} = \Delta T.$$

Для кругового процесса, в соответствии с первым началом термодинамики, суммарное подведенное к газу количество теплоты равно работе газа, совершенной им в данном замкнутом цикле:

$$Q_{12} + Q_{23} + Q_{31} = A.$$

Тепло, подведенное на адиабате 1-2, равно нулю:

$$Q_{12} = 0.$$

На изотерме 2-3 внутренняя энергия гелия остается неизменной, и подведенное тепло равно работе газа:

$$Q_{23} = A_{23}.$$

При изобарическом процессе 3-1 подведенное к газу тепло идет на увеличение его внутренней энергии и на работу газа:

$$Q_{31} = C_V (T_1 - T_{23}) + p_{31} (V_1 - V_3) = (C_V + R) \Delta T.$$

Окончательно получим

$$A_{23} + (C_V + R) \Delta T = A.$$

Отсюда найдем работу гелия на изотерме 2–3:

$$A_{23} = A - (C_V + R) \Delta T = A - \frac{5}{2} R \Delta T.$$

**Задача 5.** Подвижный поршень массой  $m$ , подвешенный на пружине, делит объем откачанного вертикального цилиндра на две части (рис.7). В положении равновесия высота нижней части цилиндра равна  $H_0$ , а удлинение пружины при этом составляет  $x_0$ . В нижнюю часть цилиндра впрыскивают  $\nu$  молей воды. После того как вся вода испарилась, поршень переместился на величину  $x_1 = \alpha x_0$  ( $\alpha = 3$ ). Найдите: 1) установившуюся температуру пара; 2) работу, совершенную паром. Теплоотводом через стенки цилиндра пренебречь.

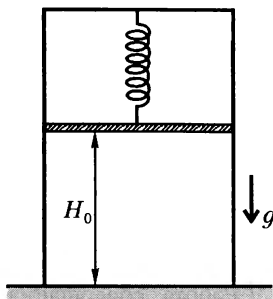


Рис. 7

Запишем условие механического равновесия поршня до впрыскивания воды:

$$mg = kx_0,$$

где  $k$  – жесткость пружины. После испарения воды и установления нового равновесия поршня объем пара будет

$$V_{\pi} = (H_0 + \alpha x_0) S,$$

где  $S$  – площадь внутреннего поперечного сечения цилиндра. Давление пара при этом будет равно

$$p_{\pi} = \frac{mg + kx_0(\alpha - 1)}{S} = \frac{\alpha mg}{S}.$$

Рассматривая пар как идеальный газ, из уравнения состояния найдем температуру пара:

$$T_{\pi} = \frac{p_{\pi} V_{\pi}}{\nu R} = \frac{\alpha mg (H_0 + \alpha x_0)}{\nu R}.$$

Работа, совершенная паром, пойдет на приращение потенциальной энергии поршня и пружины. Если отсчитывать потенциальную энергию поршня от его положения при отсутствии воды в цилиндре, то суммарная потенциальная энергия поршня и пружины в начальный момент равна

$$W_1 = \frac{kx_0^2}{2} = \frac{mgx_0}{2}.$$

Потенциальная энергия в конечном состоянии составляет

$$W_2 = \frac{kx_0^2(\alpha - 1)^2}{2} + mg\alpha x_0 = \frac{mgx_0(\alpha^2 + 1)}{2}.$$

Работа пара равна изменению потенциальной энергии:

$$A_{\pi} = W_2 - W_1 = \frac{\alpha^2 mgx_0}{2} = \frac{9}{8} mgx_0.$$

**Задача 6.** Какую максимальную работу можно получить от периодически действующей тепловой машины, нагревателем которой служит  $m_1 = 1$  кг воды при начальной температуре  $T_1 = 373$  К, а холодильником —  $m_2 = 1$  кг льда при температуре  $T_2 = 273$  К, к моменту, когда растает весь лед? Чему будет равна температура воды нагревателя в этот момент? Удельная теплота плавления льда  $q = 80$  ккал/кг. Зависимость теплоемкости воды от температуры пренебречь.

Работа, совершаемая любой тепловой машиной в замкнутом цикле, по первому началу термодинамики равна

$$A = Q_1 - Q_2,$$

где  $Q_1$  — количество теплоты, подведенное к рабочему телу за цикл, а  $Q_2$  — отведенное количество теплоты. Коэффициент полезного действия (КПД) тепловой машины равен

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Максимальную работу можно получить (теоретически), если тепловая машина будет работать по циклу Карно. КПД цикла Карно зависит только от температур  $T_1$  и  $T_2$  нагревателя и холодильника:

$$\eta_{\text{к}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Сравнивая два выражения для КПД, найдем, что для цикла Карно

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}.$$

В нашем случае количество теплоты  $Q_2$ , отведенное от рабочего тела и переданное холодильнику, будет идти на плавление льда, и температура холодильника  $T_2$  будет оставаться постоянной (пока не растает весь лед) и равной 273 К. А вот температура нагревателя (горячая вода) будет уменьшаться после каждого цикла, и к моменту, когда растает лед, темпера-

тура воды нагревателя будет заметно меньше начальной, равной 373 К. Следовательно, температура нагревателя будет переменной величиной.

Пусть в некоторый произвольный момент времени температура нагревателя равна  $T$ , а за бесконечно малое время работы тепловой машины она уменьшилась на  $dT$ . Количество теплоты, переданное рабочему телу за это время, равно

$$dQ_1 = -c_b m_1 dT,$$

где  $c_b$  — удельная теплоемкость воды. Количество теплоты, переданное холодильнику, составляет

$$dQ_2 = q dm_2,$$

где  $dm_2$  — бесконечно малое количество растаявшего льда. Воспользовавшись соотношением между  $Q$  и  $T$  для цикла Карно, получим

$$-\frac{q dm_2}{c_b m_1 dT} = \frac{T_2}{T}.$$

После разделения переменных  $T$  и  $m_2$  это уравнение будет иметь вид

$$\frac{dT}{T} = -\frac{q dm_2}{c_b m_1 T_2}.$$

Проинтегрируем обе части данного уравнения:

$$\int_{T_1}^{T_k} \frac{dT}{T} = -\frac{q}{c_b m_1 T_2} \int_0^{m_2} dm_2,$$

где  $T_k$  — конечная температура воды в нагревателе к моменту, когда весь лед растает. После интегрирования получим

$$\ln \frac{T_k}{T_1} = -\frac{q m_2}{c_b m_1 T_2},$$

откуда найдем

$$T_k = T_1 \exp\left(-\frac{q m_2}{c_b m_1 T_2}\right) = 278,3 \text{ К}.$$

Теперь мы можем определить суммарное количество теплоты, полученное от нагревателя к моменту полного таяния льда:

$$Q_1 = c_b m_1 (T_1 - T_k).$$

Суммарное количество теплоты, переданное холодильнику, равно

$$Q_2 = q m_2.$$

Следовательно, от тепловой машины можно получить максимальную работу

$$A_{\max} = Q_1 - Q_2 = c_v m_1 (T_1 - T_k) - q m_2 = 61,5 \text{ кДж}.$$

### Упражнения

1. Моль гелия, расширяясь в процессе 1-2, где его давление  $p$  меняется прямо пропорционально объему  $V$ , совершает работу  $A$  (рис.8). Из состояния 2 гелий расширяется в процессе 2-3, в котором его теплоемкость остается постоянной и равной  $C = R/2$ . Какую работу совершит гелий в процессе 2-3, если температуры начального (1) и конечного (3) состояний равны?

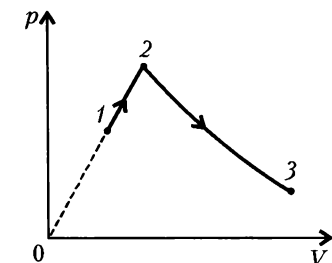


Рис. 8

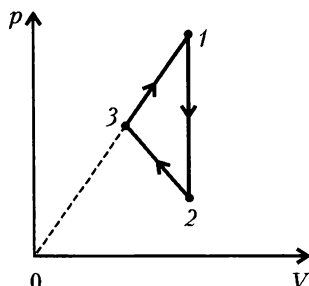


Рис. 9

2. Цикл для  $\nu$  молей гелия состоит из двух участков линейной зависимости давления  $p$  от объема  $V$  и одной изохоры (рис.9). В изохорическом процессе 1-2 от газа было отведено количество теплоты  $Q$  ( $Q > 0$ ), и его температура уменьшилась в 4 раза. Температуры в состояниях 2 и 3 равны. Точки 1 и 3 на диаграмме  $pV$  лежат на прямой, проходящей через начало координат.

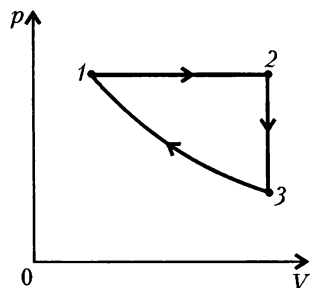


Рис. 10

1) Найдите температуру  $T_1$  в точке 1. 2) Найдите работу газа за цикл.

3. Моль гелия совершает работу  $A$  в замкнутом цикле, состоящем из изобары 1-2, изохоры 2-3 и адиабатического процесса 3-1 (рис.10). Сколько тепла было подведено к газу в изобарическом процессе, если разность максимальной и минимальной температур гелия в цикле равна  $\Delta T$ ?

## ТЕПЛОЕМКОСТЬ РАВНОВЕСНЫХ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ

*В.Можаев*

Теплоемкостью  $C$  тела (в газообразном, жидком или твердом состоянии) называют отношение бесконечно малого количества теплоты  $\Delta Q$ , полученного этим телом, к соответствующему приращению температуры  $\Delta T$ :

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

В случае единичной массы тела теплоемкость называют удельной, а если масса тела равна массе одного моля, то говорят о молярной теплоемкости.

В этой статье речь пойдет о теплоемкости идеального газа.

Следует подчеркнуть, что теплоемкость не является функцией состояния тела, а характеризует *процесс*, по которому тело из состояния с температурой  $T$  переходит в состояние с температурой  $T + \Delta T$ . Например, если такой переход происходит при постоянном объеме, то это будет теплоемкость при постоянном объеме:

$$C_V = \left( \frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_V.$$

В случае изобарического процесса мы имеем дело с теплоемкостью при постоянном давлении:

$$C_p = \left( \frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_p.$$

В одних процессах теплоемкость остается постоянной и не зависит от параметров, характеризующих состояние тела (такие процессы называют политропическими), а в других процессах теплоемкость может непрерывно изменяться и даже испытывать скачки.

Рассмотрим на конкретных примерах поведение теплоемкости идеального газа в различных тепловых процессах.

**Задача 1.** Найдите молярную теплоемкость одноатомного



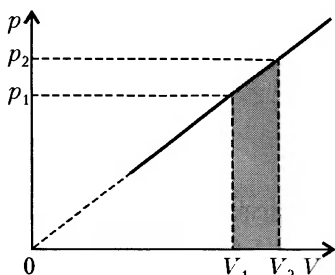


Рис. 1

идеального газа для процесса, в котором давление  $p$  пропорционально объему  $V$ .

Запишем уравнение такого процесса:

$$p = \alpha V,$$

где  $\alpha$  – некоторая положительная константа. Этот процесс изображен прямой линией на рисунке 1.

Пусть один моль одноатомного идеального газа находится в равновесном состоянии 1, которое принадлежит данной прямой. Параметры газа в этом состоянии: объем  $V_1$  и давление  $p_1$ . Подведем к газу небольшое количество теплоты  $\Delta Q$ , и газ перейдет в новое состояние 2 с параметрами  $V_2$  и  $p_2$ . При этом все промежуточные состояния, так же, как и состояние 2, лежат на данной прямой.

По первому началу термодинамики, подведенное количество теплоты частично пошло на изменение внутренней энергии газа, а частично – на работу, которую совершил газ против внешних сил:

$$\Delta Q = \Delta U + A = C_V (T_2 - T_1) + A.$$

Здесь  $T_1$  и  $T_2$  – температуры газа в состояниях 1 и 2. Работа, совершенная газом, численно равна площади трапеции, выделенной на рисунке 1:

$$A = \frac{(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)}{2} = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{2} = \frac{R(T_2 - T_1)}{2}.$$

При записи этой цепочки равенств был использован тот факт, что  $p_1 V_2 = p_2 V_1$  (из подобия соответствующих треугольников), а также уравнение состояния  $pV = RT$ , где  $R$  – универсальная газовая постоянная. После подстановки выражения для  $A$  в уравнение первого начала термодинамики получим

$$\Delta Q = \left( C_V + \frac{R}{2} \right) (T_2 - T_1).$$

По определению теплоемкости,

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta Q}{T_2 - T_1} = C_V + \frac{R}{2}.$$

Для одноатомного газа  $C_V = \frac{3}{2}R$ , поэтому окончательно

$$C = 2R.$$

Сделаем некоторые замечания.

1) Надо прекрасно понимать, что полученный результат имеет смысл только для таких параметров  $p$  и  $V$ , при которых газ можно считать идеальным.

2) Если внимательно посмотреть на полученный результат  $C = C_V + R/2$  и вспомнить, что  $C_p = C_V + R$ , то можно заметить, что наша теплоемкость  $C$  равна среднему значению между  $C_p$  и  $C_V$ , т.е.  $C = \frac{C_p + C_V}{2}$ .

3) Единственным параметром, изменяющим характер теплового процесса, в нашем случае является тангенс угла наклона прямой  $\alpha$ . Но наша теплоемкость не зависит от  $\alpha$ , и мы оказываемся на «необитаемом острове» и никак не можем достигнуть ни  $C_p$  ни  $C_V$ . С математической точки зрения, так оно и есть: изменяя только один параметр  $\alpha$ , мы не сможем перейти к процессам  $V = \text{const}$  или  $p = \text{const}$ . Промежуточным процессом, позволяющим перейти от нашего процесса к изохорному или изобарному процессам, является процесс  $p = \alpha V + \beta$  (см. в Упражнениях задачу 1).

**Задача 2.** Используя первое начало термодинамики, уравнение состояния и выражение для внутренней энергии идеального газа, получите уравнение (например, в координатах  $p$  и  $V$ ) такого процесса, в котором молярная теплоемкость газа постоянна и равна  $C$ .

Рассмотрим один моль идеального газа, молярная теплоемкость которого постоянна и равна  $C$ . Пусть этот газ находится в равновесном состоянии с параметрами  $p$ ,  $V$  и  $T$ , которые связаны между собой уравнением состояния

$$pV = RT.$$

Подведем к газу небольшое количество теплоты  $\Delta Q$ . Это тепло пойдет на изменение внутренней энергии газа и на работу, которую совершит газ при своем расширении:

$$\Delta Q = C_V \Delta T + p \Delta V.$$

С другой стороны,

$$\Delta Q = C \Delta T.$$

Отсюда получим

$$(C - C_V) \Delta T = p \Delta V,$$

или

$$(C - C_V) \Delta T = \frac{RT}{V} \Delta V.$$

Разделим переменные  $T$  и  $V$ :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{R}{C - C_V} \frac{\Delta V}{V}.$$

Проинтегрируем обе части данного уравнения и получим

$$\ln T = \frac{R}{C - C_V} \ln V + \text{const},$$

или, проведя соответствующие математические преобразования,

$$TV^{\frac{R}{C - C_V}} = \text{const}.$$

Константа в последнем уравнении не равна константе в предыдущем уравнении, но это не имеет никакого значения.

Мы получили уравнение процесса с постоянной молярной теплоемкостью  $C$  в переменных  $T$  и  $V$ . Найдём эквивалентное выражение данного процесса в переменных  $p$  и  $V$ . Для этого воспользуемся выражением для температуры из уравнения состояния:

$$T = \frac{pV}{R}$$

и получим

$$pV^{\frac{C - C_V - R}{C - C_V}} = \text{const}.$$

Процессы с постоянной теплоемкостью называют политропическими процессами, а последние два уравнения – уравнениями политропы. Рассмотрим известные процессы с постоянной теплоемкостью:

- если  $C = C_V$ , то из уравнения политропы получим, что  $V = \text{const}$ , т.е. процесс идет при постоянном объеме – изохорный процесс;
- если  $C = C_p = C_V + R$ , то  $p = \text{const}$  – изобарный процесс;
- если  $C = \infty$ , то  $T = \text{const}$  – изотермический процесс;
- если  $C = 0$ , то  $pV^{\frac{C_V + R}{C_V}} = \text{const}$  – это уравнение адиабатического процесса.

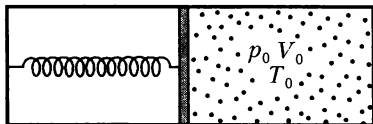


Рис. 2

**Задача 3.** Найдите теплоемкость системы, состоящей из закрытого цилиндрического сосуда, в котором имеется подвижный поршень (рис.2). Справа от поршня

сосуд заполнен одноатомным идеальным газом с параметрами  $T_0, p_0, V_0$ , а слева от поршня – вакуум. Поршень удерживается

упругой пружиной. Если газ справа откачать, то поршень будет соприкасаться с правой стенкой сосуда, а пружина не будет деформирована. Теплоемкостями сосуда, поршня и пружины пренебречь.

Из заданного равновесного состояния найдем жесткость пружины  $k$ . Для этого запишем условие неподвижности поршня:

$$k \frac{V_0}{S} = p_0 S,$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения сосуда. Отсюда

$$k = \frac{p_0 S^2}{V_0}.$$

Если от газа отвести некоторое количество теплоты, то поршень сместится вправо и займет новое положение равновесия с объемом  $V$  и давлением  $p$ . Новое условие неподвижности поршня будет иметь вид

$$k \frac{V}{S} = pS.$$

После подстановки в это уравнение выражения для жесткости  $k$  получим

$$pV^{-1} = \frac{p_0}{V_0} = \text{const}.$$

Это уравнение показывает, что данный процесс является политропическим процессом. Приравнивая показатель степени объема в уравнении политропы к минус единице, найдем молярную теплоемкость данного процесса:

$$\frac{C - C_V - R}{C - C_V} = -1,$$

откуда

$$C = C_V + \frac{R}{2}.$$

Для одноатомного газа  $C_V = \frac{3}{2}R$ , поэтому  $C = 2R$ . Но это молярная теплоемкость, а число молей нашего газа равно

$$\nu = \frac{p_0 V_0}{RT_0}.$$

Итак, теплоемкость системы, т.е. всего газа, равна

$$C_{\text{сист}} = C\nu = \frac{2p_0 V_0}{T_0}.$$

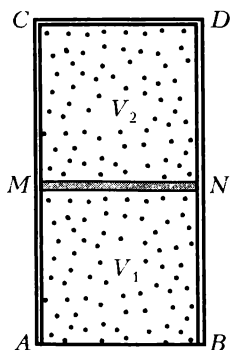


Рис. 3

**Задача 4.** Боковые стенки цилиндра  $AC$  и  $BD$ , его крышка  $CD$  и невесомый поршень  $MN$  выполнены из материала, не проводящего тепло (рис. 3). Дно  $AB$  проводит тепло. Поршень может перемещаться в цилиндре без трения. Сверху и снизу от поршня находится по одному молю одноатомного идеального газа. Тепло может подводиться к газу (или отводиться от газа) в нижней части цилиндра через дно  $AB$ . Выразите теплоемкость  $C_1$  нижнего газа через объемы газов  $V_1$  и  $V_2$ . Чему равна при этом теплоемкость  $C_2$  верхнего газа?

В исходном состоянии нижний газ занимает объем  $V_1$ , имеет некоторое давление  $p$  и некоторую температуру  $T_1$ , а верхний газ занимает объем  $V_2$ , его давление также  $p$ , а температура  $T_2$ .

Пусть через дно  $AB$  в сосуд подвели небольшое количество теплоты  $\Delta Q$ . Очевидно, что это тепло поступит только к нижнему газу, поскольку поршень  $MN$  не проводит тепло. Следовательно, мы можем записать

$$\Delta Q = C_1 \Delta T_1,$$

где  $C_1$  – теплоемкость, а  $\Delta T_1$  – изменение температуры нижнего газа. По первому началу термодинамики,

$$C_1 \Delta T_1 = C_V \Delta T_1 + p \Delta V_1.$$

Из уравнения состояния найдем связь бесконечно малых приращений параметров нижнего газа  $\Delta T_1$ ,  $\Delta V_1$ , и  $\Delta p$ :

$$\Delta(pV_1) = R \Delta T_1,$$

или

$$\Delta p V_1 + p \Delta V_1 = R \Delta T_1.$$

Теперь обратимся к верхнему газу. Над этим газом совершается адиабатический процесс. В задаче 2 было получено уравнение такого процесса (когда теплоемкость равна нулю):

$$p V_2^{\frac{C_V + R}{C_V}} = \text{const}.$$

Обозначим показатель степени при  $V$  через  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{C_V + R}{C_V}$$

и возьмем бесконечно малое приращение от обеих частей уравнения адиабаты:

$$\Delta(pV_2^\gamma) = 0.$$

Проведя дифференцирование произведения двух функций, получим

$$\Delta p V_2^\gamma + \gamma p V_2^{\gamma-1} \Delta V_2 = 0,$$

или, после сокращения на  $V_2^{\gamma-1}$ ,

$$\Delta p V_2 + \gamma p \Delta V_2 = 0.$$

Отсюда, поскольку  $\Delta V_2 = -\Delta V_1$ , найдем

$$\Delta p = \gamma p \frac{\Delta V_1}{V_2}.$$

Воспользуемся тем, что приращения давления для нижнего и верхнего газов одинаковы, и получим

$$\gamma p \frac{V_1}{V_2} \Delta V_1 + p \Delta V_1 = R \Delta T_1,$$

откуда

$$\Delta V_1 = \frac{R \Delta T_1}{p \left( 1 + \gamma \frac{V_1}{V_2} \right)}.$$

Затем из первого начала термодинамики найдем теплоемкость нижнего газа:

$$C_1 = C_V + \frac{R}{\left( 1 + \gamma \frac{V_1}{V_2} \right)}.$$

Поскольку для одноатомного газа  $C_V = \frac{3}{2} R$ , а  $\gamma = \frac{5}{3}$ , то

$$C_1 = \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{\left( 1 + \frac{5}{3} \frac{V_1}{V_2} \right)} \right) R = \frac{15}{2} \frac{(V_1 + V_2)}{(5V_1 + 3V_2)} R.$$

Очевидно, что при этом теплоемкость верхнего газа  $C_2 = 0$  (адиабатический процесс).

**Задача 5.** Найдите объем и температуру, при которых теплоемкость одного моля идеального газа в процессе, описы-

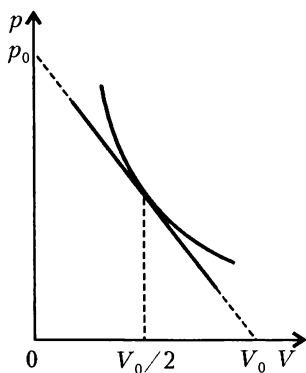


Рис. 4

ваемом уравнением  $p = p_0 - \frac{p_0}{V_0} V$ , равна бесконечности.

Уравнение заданного процесса в координатах  $p$  и  $V$  является уравнением прямой, которая изображена на рисунке 4. Если решать задачу в общем виде, то нужно найти зависимость теплоемкости данного процесса от объема, а затем посмотреть, при каком значении объема она стремится к бесконечности. Такой способ решения предложим читателю в качестве самостоятельного упражнения, а сами пойдем по другому пути.

Известен такой процесс, при котором теплоемкость равна бесконечности. Это — изотермический процесс. Следовательно, если на нашей прямой есть такая точка, в которой одна из изотерм касается ее, то в окрестности этой точки изотерма аппроксимируется прямой, а теплоемкость в этой точке равна бесконечности.

Запишем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} pV = RT, \\ p = p_0 - \frac{p_0}{V_0} V. \end{cases}$$

Будем искать совместные решения этой системы относительно объема  $V$ . Исключив  $p$ , получим квадратное уравнение

$$V^2 - V_0 V + \frac{V_0 RT}{p_0} = 0.$$

В общем случае это уравнение имеет два корня:

$$V_{1,2} = \frac{V_0}{2} \pm \sqrt{\frac{V_0^2}{4} - \frac{V_0 RT}{p_0}}.$$

Нас интересует случай, когда изотерма касается прямой, а в этом случае система уравнений должна иметь один корень, т.е. подкоренное выражение должно быть равно нулю:

$$\frac{V_0^2}{4} - \frac{V_0 RT}{p_0} = 0.$$

Отсюда мы находим температуру, при которой теплоемкость

становится равной бесконечности:

$$T_{\infty} = \frac{p_0 V_0}{4R},$$

и значение объема для этого состояния:

$$V_{\infty} = \frac{V_0}{2}.$$

Именно эта ситуация и изображена на рисунке 4.

### Упражнения

1. Вычислите зависимость молярной теплоемкости одноатомного идеального газа от его объема для процесса, в котором давление линейно зависит от объема:  $p = \alpha V + \beta$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  – константы,  $\alpha > 0$ .

2. Нагревается или охлаждается идеальный газ, если он расширяется по закону  $pV^2 = \text{const}$ ? Какова молярная теплоемкость газа в этом процессе?

3. При некотором политропическом процессе гелий был сжат от начального объема 4 л до конечного объема 1 л. Давление при этом возросло от 1 атм до 8 атм. Найдите теплоемкость всей массы гелия, если его начальная температура была 300 К.

4. Моль гелия расширяется из начального состояния 1 в конечное состояние 3 в двух процессах (рис.5). Сначала расширение идет в процессе 1–2 с постоянной теплоемкостью  $C = \frac{3}{4}R$ .

Затем газ расширяется в процессе 2–3,

когда его давление  $p$  прямо пропорционально объему  $V$ . Найдите работу, совершенную газом в процессе 1–2, если в процессе 2–3 он совершил работу  $A$ . Температуры начального и конечного состояний равны.

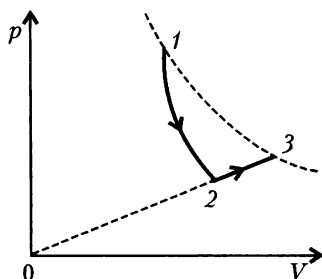


Рис. 5



## ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

*В.Можаев*

Пусть в пространстве имеется некоторое распределение зарядов. Если мы сохраним это распределение и заполним все пространство, где поле не равно нулю, диэлектриком, то напряженность электрического поля повсюду уменьшится в  $\epsilon$  раз. Здесь  $\epsilon$  – физическая характеристика диэлектрика, ее называют диэлектрической проницаемостью данного вещества. Это определение диэлектрической проницаемости среды не раскрывает механизма взаимодействия диэлектрика с внешним полем, но на школьном уровне этого вполне достаточно.

Типичным примером такой ситуации является заряженный конденсатор, например плоский, сферический или цилиндрический. Если мы сохраним распределение зарядов на его обкладках и полностью заполним его диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , то напряженность поля в любой точке внутри конденсатора уменьшится в  $\epsilon$  раз. Но если поле внутри конденсатора уменьшилось, а заряды на обкладках сохранились, то это означает, что должны появиться дополнительные заряды, которые создают поле, направленное навстречу полю наших зарядов. Так оно и происходит – на поверхностях диэлектрика, примыкающих к обкладкам конденсатора, появляются поляризационные заряды, причем их знаки противоположны знакам зарядов на обкладках, и результирующее поле внутри конденсатора уже создается всеми зарядами, включая и поляризационные.

А вот если мы будем поддерживать постоянной разность потенциалов между пластинами конденсатора, то после заполнения конденсатора диэлектриком поле внутри не изменится. Сохранение величины поля означает рост свободных зарядов на обкладках конденсатора, и понятно, что заряд конденсатора возрастет именно в  $\epsilon$  раз. Причем произойдет это благодаря источнику тока, присоединенного к конденсатору.

Еще одним фактором, влияющим на поле в диэлектрике, является конфигурация той части пространства, которая запол-

нена диэлектриком. Мы ограничимся наиболее простой формой диэлектрика: тонкая пластина или сферический слой.

А теперь перейдем к разбору конкретных примеров.

**Задача 1.** Плоский воздушный конденсатор с квадратными пластинами частично заполнен диэлектриком, как это изображено на рисунке 1 для трех разных случаев. Определите напряженность электрического поля внутри диэлектрика, если заряд на обкладках конденсатора  $Q$ , площадь пластин  $S$ , диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon$ . Размеры диэлектрика указаны на рисунке.

Рассмотрим первый случай, когда конденсатор частично заполнен слоем диэлектрика толщиной  $h$  (см. рис. 1, а). В отсутствие диэлектрика напряженность электрического поля в конденсаторе равна

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 S}. \quad (1)$$

При данном частичном заполнении пространства между обкладками диэлектриком мы можем рассматривать наш конденсатор как систему двух последовательно соединенных конденсаторов, один из которых – воздушный с емкостью

$$C_{\text{в}} = \frac{\epsilon_0 S}{d - h},$$

а другой – полностью заполненный диэлектриком, емкость которого

$$C_{\text{д}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{h}.$$

На каждом из конденсаторов находится заряд  $Q$ , поэтому разность потенциалов на заполненной диэлектриком части конденсатора равна

$$U_{\text{д}} = \frac{Q}{C_{\text{д}}} = \frac{Qh}{\epsilon_0 \epsilon S},$$

а напряженность поля в диэлектрике составляет

$$E_{\text{д}} = \frac{U_{\text{д}}}{h} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon S}. \quad (2)$$

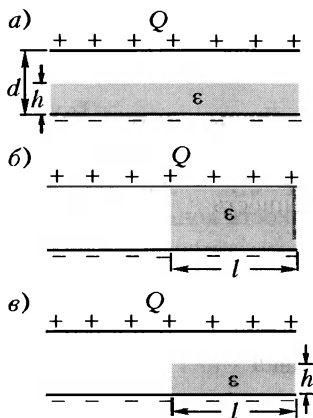


Рис. 1

Сравнивая полученное выражение с напряженностью в отсутствие диэлектрика (1), мы видим, что напряженность поля в диэлектрике уменьшилась в  $\epsilon$  раз и это ослабление поля не зависит от толщины слоя диэлектрика. При таком способе заполнения происходит максимальное ослабление поля в диэлектрике.

Перейдем ко второму случаю (см. рис. 1,б). Теперь мы можем рассматривать наш конденсатор как систему двух параллельно соединенных конденсаторов с емкостями

$$C_{\text{в}} = \frac{\epsilon_0 \sqrt{S} (\sqrt{S} - l)}{d} \quad \text{и} \quad C_{\text{д}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon \sqrt{S} l}{d},$$

где  $\sqrt{S}$  – линейный размер обкладок конденсатора. Общая емкость конденсатора составляет

$$C = C_{\text{в}} + C_{\text{д}} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \left( 1 + \frac{l(\epsilon - 1)}{\sqrt{S}} \right).$$

Разность потенциалов между обкладками такого конденсатора равна

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{Qd}{\epsilon_0 S \left( 1 + \frac{l(\epsilon - 1)}{\sqrt{S}} \right)},$$

а напряженность поля в диэлектрике –

$$E_{\text{д}} = \frac{U}{d} = \frac{Q}{\epsilon_0 S \left( 1 + \frac{l(\epsilon - 1)}{\sqrt{S}} \right)}. \quad (3)$$

Проанализируем полученное выражение на зависимость от  $l$ . При стремлении  $l$  к  $\sqrt{S}$  поле в диэлектрике уменьшается и стремится к значению

$$E_{\text{д}}(\sqrt{S}) = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon S},$$

а при стремлении  $l$  к нулю поле растет и при  $l = 0$  становится равным

$$E_{\text{д}}(0) = \frac{Q}{\epsilon_0 S}.$$

При произвольном значении  $l$  поле в диэлектрике заключено в пределах

$$\frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon S} \leq E_{\text{д}}(l) \leq \frac{Q}{\epsilon_0 S}.$$

В третьем случае (см. рис.1,в) мы можем рассматривать наш конденсатор как систему трех конденсаторов – соответствующая эквивалентная схема изображена на рисунке 2. Емкость первого, воздушного, конденсатора равна

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \sqrt{S} (\sqrt{S} - l)}{d},$$

емкость второго, воздушного, конденсатора равна

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 \sqrt{S} l}{d - h},$$

а емкость третьего конденсатора, заполненного диэлектриком, равна

$$C_3 = \frac{\epsilon_0 \epsilon \sqrt{S} l}{h}.$$

Общая емкость двух последовательно соединенных конденсаторов (второго и третьего) составляет

$$C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = \frac{\epsilon_0 \epsilon \sqrt{S} l}{h + \epsilon (d - h)},$$

а общая емкость всех конденсаторов есть

$$C = C_1 + C_{23} = \epsilon_0 \sqrt{S} \left( \frac{\sqrt{S} - l}{d} + \frac{\epsilon l}{h + \epsilon (d - h)} \right).$$

Разность потенциалов между обкладками нашего конденсатора равна

$$U = \frac{Q}{C},$$

заряд на последовательно соединенных конденсаторах равен

$$Q_{23} = U C_{23} = \frac{Q C_{23}}{C},$$

разность потенциалов на третьем конденсаторе составляет

$$U_3 = \frac{Q_{23}}{C_3} = \frac{Q C_{23}}{C_3 C},$$

а напряженность поля внутри диэлектрика есть

$$E_d = \frac{U_3}{h} = \frac{Q}{\epsilon_0 S \left( \frac{h}{d} \left( 1 - \frac{l}{\sqrt{S}} \right) + \epsilon \left( 1 - \frac{h}{d} + \frac{hl}{d\sqrt{S}} \right) \right)}.$$

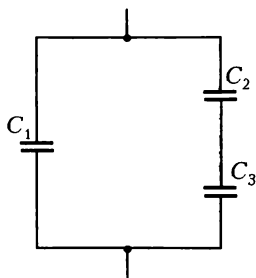


Рис. 2

Нетрудно убедиться, что полученное выражение при  $l = \sqrt{S}$  переходит в выражение (2), а при  $h = d$  – в выражение (3).

Следует отметить, что во втором и третьем случаях при сохранении заряда на обкладках конденсаторов происходит перераспределение этого заряда: поверхностная плотность зарядов на той части пластин, которые примыкают к диэлектрику, больше, чем на воздушной части пластин. Убедиться в этом мы предлагаем читателю в качестве упражнения.

**Задача 2.** *Проводящая заряженная сфера радиусом  $r_1$  окружена сферическим слоем диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Радиус внешней поверхности диэлектрика равен  $r_2$ . Определите поверхностную плотность поляризационных зарядов на внешней поверхности диэлектрика, если на сфере находится свободный заряд  $Q$ .*

Можно сразу сказать, что напряженность поля внутри диэлектрика будет в  $\epsilon$  раз меньше по сравнению с полем без диэлектрика. Действительно, заряд на сфере сохраняется, сохраняется и его равномерное распределение по сфере (в силу сферической симметрии). Но диэлектрик заполняет только часть пространства, поэтому наше утверждение требует доказательства.

Заполним все пространство вне сферы ( $r_1 \leq r \leq \infty$ ) нашей диэлектрической средой. В этом случае напряженность электри-

ческого поля во всей этой области уменьшится в  $\epsilon$  раз. Мысленно проведем сферу радиусом  $r_2$  (рис.3). Пусть на поверхности сферы радиусом  $r_1$  расположен свободный положительный заряд  $Q$ , тогда вблизи этой поверхности будет равномерно распределен связанный отрицательный заряд. Обозначим величину этого заряда через  $q_{\text{св}}$ . Вблизи сферической поверхности радиусом  $r_2$  (с внутренней и внешней стороны) также будут расположены связанные

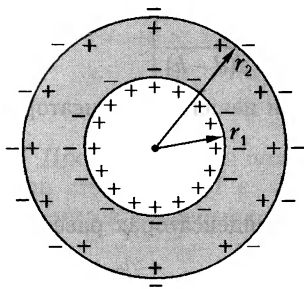


Рис. 3

заряды, равные по величине  $q_{\text{св}}$  и противоположные по знаку. Связанные отрицательные заряды на сфере радиусом  $r_2$  никакого влияния на поле в области  $0 \leq r \leq r_2$  не оказывают – результирующее поле, которое они создают в любой точке этой области, равно нулю. Поэтому мы можем убрать диэлектрик из области  $r_2 \leq r \leq \infty$ , и ничего при этом не изменится в интересующей нас области.

Итак, напряженность электрического поля в области  $r_1 \leq r \leq r_2$  в отсутствие диэлектрика равна

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

а при наличии диэлектрика –

$$E_d(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2}.$$

С другой стороны, это же поле равно сумме полей, создаваемых зарядами  $Q$  и  $q_{\text{св}}$ , где  $q_{\text{св}}$  – это отрицательный заряд у поверхности сферы радиусом  $r_1$ :

$$E_d(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{q_{\text{св}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} (Q - q_{\text{св}}).$$

Сравнивая два выражения для  $E_d$ , получим

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2} = \frac{Q - q_{\text{св}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Отсюда находим величину связанного заряда:

$$q_{\text{св}} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} Q$$

и его поверхностную плотность на сфере радиусом  $r_2$ :

$$\sigma_{\text{св}}(r_2) = \frac{q_{\text{св}}}{4\pi r_2^2} = \frac{(\epsilon - 1) Q}{4\pi \epsilon r_2^2}.$$

**Задача 3.** Плоский воздушный конденсатор с площадью пластин  $S = 150 \text{ см}^2$  и расстоянием между пластинами  $d = 6 \text{ мм}$  подключен к батарее с ЭДС  $\mathcal{E} = 200 \text{ В}$ . Какую минимальную работу необходимо совершить, чтобы в область между пластинами конденсатора вставить слюдяную пластинку толщиной  $h = 4 \text{ мм}$ ? Горизонтальные размеры всех пластин одинаковы, а диэлектрическая проницаемость слюды  $\epsilon = 7$ .

Минимальную работу найдем по закону сохранения энергии. Энергия и заряд конденсатора до введения пластинки равны соответственно

$$W_1 = \frac{C_1 \mathcal{E}^2}{2} = \frac{\epsilon_0 S \mathcal{E}^2}{2d} \quad \text{и} \quad Q_1 = \frac{\epsilon_0 S \mathcal{E}}{d}.$$

Емкость конденсатора после введения пластинки стала (см. задачу 1)

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{h + \epsilon(d - h)}.$$

Энергия конденсатора и заряд на нем после введения пластинки стали

$$W_2 = \frac{C_2 \varepsilon^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S \varepsilon^2}{2(h + \varepsilon(d - h))} \quad \text{и} \quad Q_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S \varepsilon}{h + \varepsilon(d - h)}.$$

Изменение энергии конденсатора равно

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{\varepsilon_0 S \varepsilon^2 h (\varepsilon - 1)}{2d(h + \varepsilon(d - h))}.$$

Работа батареи по переносу заряда  $Q_2 - Q_1$  составляет

$$A_6 = \varepsilon (Q_2 - Q_1) = \frac{\varepsilon_0 S \varepsilon^2 h (\varepsilon - 1)}{d(h + \varepsilon(d - h))}.$$

По закону сохранения энергии работа внешних сил равна

$$A = \Delta W - A_6 = -\frac{\varepsilon_0 S \varepsilon^2 h (\varepsilon - 1)}{2d(h + \varepsilon(d - h))} = -5,9 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}.$$

**Задача 4.** В плоский воздушный конденсатор вставлена стеклянная пластина ( $\varepsilon = 9$ ) так, что остался воздушный зазор толщиной  $h = 1$  мм. Расстояние между обкладками конденсатора  $d = 1$  см. Конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения  $U_0 = 100$  В. Чему будет равно напряжение на конденсаторе, если после отключения его от источника убрать стеклянную пластину?

Емкость пустого (воздушного) конденсатора равна

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d},$$

где  $S$  – площадь обкладок конденсатора. Емкость конденсатора со вставленной стеклянной пластиной равна емкости двух последовательно соединенных конденсаторов: воздушного толщиной  $h$  и стеклянного толщиной  $d - h$  и составляет

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d + h(\varepsilon - 1)}.$$

Заряд, оставшийся на конденсаторе емкостью  $C$  после его отключения от источника напряжения, равен

$$Q = C U_0 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U_0}{d + h(\varepsilon - 1)}.$$

После удаления стеклянной пластины заряд на обкладках конденсатора сохраняется, а емкость и напряжение изменяются.

Новое напряжение составит

$$U = \frac{Q}{C_0} = \frac{\varepsilon U_0}{1 + \frac{h}{d}(\varepsilon - 1)} = 500 \text{ В}.$$

**Задача 5.** Плоский воздушный конденсатор с квадратными пластинами – расстояние между пластинами  $d$  и площадь пластин  $S$  – заряжен до разности потенциалов  $U$  и отсоединен от источника напряжения. После этого в конденсатор до его середины вдвигают широкую пластину из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Толщина пластины  $d$ . Определите силу, с которой пластина втягивается в конденсатор в данном положении.

Емкость пустого (воздушного) конденсатора равна

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

После отключения источника напряжения на конденсаторе остается заряд

$$Q_0 = C_0 U = \frac{\varepsilon_0 S U}{d}.$$

При вставленной пластине одна половина конденсатора заполнена диэлектриком, а другая остается пустой. Емкость такого конденсатора составляет

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S (\varepsilon + 1)}{2d},$$

а его энергия равна

$$W_1 = \frac{Q_0^2}{2C_1} = \frac{Q_0^2 d}{\varepsilon_0 S (\varepsilon + 1)}.$$

Пусть на диэлектрическую пластину в этом положении действует со стороны электрического поля сила  $F$ , которая приложена в месте максимальной неоднородности поля и направлена в сторону незаполненной части конденсатора (рис.4). Приложим к диэлектрической пластине внешнюю силу, равную  $F$  и направленную в противоположную сторону. Выдвинем пластину на небольшую величину  $dx$ , совершив при этом работу

$$dA = F dx.$$

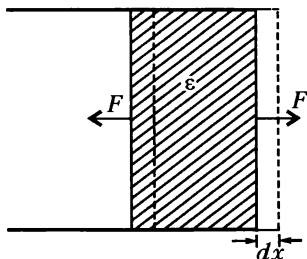


Рис. 4



Очевидно, что эта работа пойдет на изменение энергии конденсатора. Найдем новую емкость и новую энергию конденсатора после перемещения диэлектрической пластины:

$$C_2 = C_1 \left( 1 + \frac{2(1-\epsilon) dx}{(1+\epsilon)\sqrt{S}} \right) \text{ и } W_2 = \frac{Q_0^2}{2C_2}.$$

Изменение энергии конденсатора равно

$$dW = W_2 - W_1 = \frac{Q_0^2}{2} \left( \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1} \right) = \frac{Q_0^2}{2} \frac{(C_1 - C_2)}{C_1 C_2}.$$

Поскольку емкость  $C_2$  мало отличается от  $C_1$ , можно положить, что

$$C_1 C_2 = C_1^2.$$

В этом предположении

$$dW = \frac{2(\epsilon - 1) dQ_0^2 dx}{\epsilon_0 (\epsilon + 1)^2 S^{3/2}}.$$

Приравнивая работу  $dA$  к изменению энергии  $dW$ , найдем силу, с которой пластина втягивается в конденсатор:

$$F = \frac{2(\epsilon - 1) dQ_0^2}{\epsilon_0 (\epsilon + 1)^2 S^{3/2}}.$$

После подстановки в это соотношение выражения для заряда  $Q_0$ , окончательно получим

$$F = \frac{2\epsilon_0 (\epsilon - 1) \sqrt{S} U^2}{(\epsilon + 1)^2 d}.$$

**Задача 6.** Плоский воздушный конденсатор частично погружен в жидкость с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и плотностью  $\rho$  (рис.5). Через разомкнутый ключ  $K$  к пластинам конденсатора подведена батарея с ЭДС  $\mathcal{E}$ . Внутреннее сопротивление батареи мало. Пренебрегая вязкостью жидкости и капиллярными явлениями, определите максимальную высоту подъема жидкости в конденсаторе после замыкания ключа. На какой высоте установится жидкость при наличии тепловых потерь?

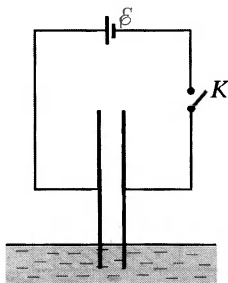


Рис. 5

Поскольку омическим сопротивлением в электрической цепи мы пренебрегаем, сразу после замыкания ключа и в последу-

ющее время напряжение на конденсаторе будет равно ЭДС батареи  $\mathcal{E}$ . Пусть после замыкания ключа жидкий диэлектрик поднимется на максимальную высоту  $h$ . Очевидно, что в этом случае работа, совершенная батареей, пойдет на изменение энергии конденсатора и на изменение потенциальной энергии жидкости в поле тяжести (изменение кинетической энергии жидкости равно нулю).

Обозначим начальную емкость пустого (воздушного) конденсатора через  $C_0$ . Тогда емкость конденсатора в момент подъема жидкости на высоту  $h$  равна

$$C_h = C_0 + \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) ah}{d},$$

где  $a$  — ширина пластин конденсатора. Изменение электрической энергии конденсатора после подъема жидкости равно

$$\Delta W_{\kappa} = (C_h - C_0) \frac{\mathcal{E}^2}{2} = \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) ah \mathcal{E}^2}{2d}.$$

Изменение потенциальной энергии поднятой жидкости составляет

$$\Delta W_{\text{ж}} = \frac{\rho g ah^2 d}{2}.$$

Работа, совершенная батареей, равна

$$\Delta A = (C_h - C_0) \mathcal{E}^2 = \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) ah \mathcal{E}^2}{d}.$$

Записав закон сохранения энергии, получим уравнение для определения  $h$ :

$$\frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) ah \mathcal{E}^2}{d} = \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) ah \mathcal{E}^2}{2d} + \frac{\rho g ah^2 d}{2}.$$

Данное квадратное уравнение имеет два решения:

$$h_1 = 0 \text{ и } h_2 = \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) \mathcal{E}^2}{\rho g d^2}.$$

Первое решение ( $h_1 = 0$ ) соответствует начальному положению уровня жидкости, второе решение ( $h_2$ ) отвечает максимальному подъему жидкости через некоторое время после замыкания ключа. А то положение уровня жидкости, которое установится после замыкания ключа при наличии тепловых потерь, должно соответствовать минимуму полной энергии нашей системы.

Обозначим установившуюся высоту подъема через  $z$ . Емкость конденсатора в этом случае равна

$$C_z = C_0 + \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) az}{d}.$$

Заряд на конденсаторе составляет

$$Q_z = C_z \mathcal{E} = \left( C_0 + \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) az}{d} \right) \mathcal{E}.$$

Энергия, запасенная в батарее, равна

$$W_6 = W_0 - Q_z \mathcal{E} = W_0 - \left( C_0 + \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) az}{d} \right) \mathcal{E}^2,$$

где  $W_0$  — начальная (до замыкания ключа) энергия в батарее. Энергия конденсатора составляет

$$W_{\kappa} = \left( C_0 + \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) az}{d} \right) \frac{\mathcal{E}^2}{2}.$$

Потенциальная энергия поднятой жидкости есть

$$W_{\text{ж}} = \frac{\rho g a d z^2}{2}.$$

Полная энергия нашей системы равна

$$W = W_6 + W_{\kappa} + W_{\text{ж}},$$

или

$$W = W_0 - \left( C_0 + \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) az}{d} \right) \frac{\mathcal{E}^2}{2} + \frac{\rho g a d z^2}{2}.$$

Запишем условие минимума энергии

$$\frac{dW}{dz} = 0$$

и после дифференцирования получим уравнение

$$\rho g a d z - \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) a \mathcal{E}^2}{2d} = 0.$$

Отсюда найдем

$$z = \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) \mathcal{E}^2}{2 \rho g d^2}.$$

Как видно из полученного выражения, высота, соответствующая устойчивому положению уровня жидкости, в два раза меньше максимальной высоты подъема. При отсутствии затуха-

ния жидкость колебалась бы около положения  $h = z$  с амплитудой, равной  $z$ . При малых потерях энергии колебания будут затухать, и уровень жидкости установится на высоте  $z$ .

### Упражнения

1. Плоский воздушный конденсатор с расстоянием между обкладками  $d = 10$  мм частично заполнен плоскопараллельным слоем диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 7$ . Толщина слоя диэлектрика  $h = 6$  мм. Конденсатор подключен к батарее с ЭДС  $\mathcal{E} = 100$  В. Чему равна напряженность электрического поля внутри диэлектрика?

2. Плоский конденсатор, полностью заполненный диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , заряжают от батареи с ЭДС  $\mathcal{E}$  и отключают. Определите поверхностную плотность поляризационных зарядов на границе проводник – диэлектрик, если расстояние между пластинами конденсатора  $d$ .

3. Плоский конденсатор, пластины которого имеют площадь  $S$  и расположены на расстоянии  $d$  друг от друга, заполнен твердым диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Конденсатор подключен к батарее, ЭДС которой  $\mathcal{E}$ . Одну из пластин конденсатора отодвигают так, что образуется воздушный зазор. На какое расстояние отодвинули пластину, если при этом была совершена работа  $A$ ?

4. Диэлектрическая пластина толщиной  $l_1$  с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  введена между обкладками плоского воздушного конденсатора так, что между поверхностями пластины и обкладками конденсатора остались воздушные зазоры, суммарная толщина которых равна  $l_2$ . Определите силу притяжения между обкладками, если разность потенциалов между ними  $U$ , а площадь пластин  $S$ . Как изменится выражение для силы в предельном случае при  $l_2 \rightarrow 0$ ?

## ЗАКОН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

*В. Дроздов*

Закон электромагнитной индукции Фарадея говорит о том, что в проводящем контуре наводится электродвижущая сила (ЭДС) индукции, равная скорости изменения магнитного потока, пронизывающего этот контур:

$$\mathcal{E}_i = -\Phi' . \quad (1)$$

Знак «минус» здесь отражает правило Ленца: направление индукционного тока таково, что его магнитное поле противодействует изменению магнитного потока. Однако при вычислении модуля ЭДС индукции, что приходится делать чаще всего, этот знак опускается.

Формула (1) часто записывается в несколько ином виде:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} . \quad (2)$$

Понятно, что формулы (1) и (2) равносильны лишь для равномерного изменения магнитного потока. В общем же случае формула (1) дает мгновенное значение ЭДС индукции, а формула (2) – ее среднее значение. Первую формулу удобно применять, когда магнитный поток легко записать как функцию времени. Второй формулой надо пользоваться для таких быстрых процессов изменения магнитного потока, когда его невозможно выразить функцией времени, в этих случаях средняя ЭДС практически совпадает с мгновенной.

Если магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$  в данный момент времени одинаково в любой точке плоского контура площадью  $S$ , то магнитный поток через этот контур равен

$$\Phi = BS \cos \alpha ,$$

где  $\alpha$  – угол между вектором  $\vec{B}$  и нормалью к контуру. Очевидно, что магнитный поток может меняться при изменении любой из величин  $B$ ,  $S$ ,  $\alpha$ , в реальных же задачах обычно меняется что-то одно из трех.

Переходим к рассмотрению конкретных задач.

**Задача 1.** Плоский виток изолированного провода перегибают, придавая ему вид «восьмерки», а затем помещают в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции. Длина витка  $l = 120$  см. Петли восьмерки можно считать окружностями с отношением радиусом 1:2. Какой ток потечет по проводу, если поле будет убывать с постоянной скоростью  $\Delta B/\Delta t = 10^{-2}$  Тл/с? Сопротивление витка  $R = 10$  Ом.

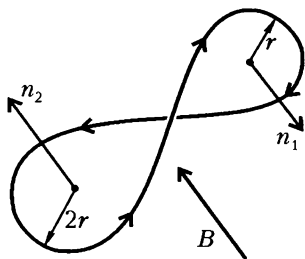


Рис. 1

Геометрически очевидно нахождение радиусов петель восьмерки и их площадей (рис.1):

$$r = \frac{l}{6\pi}, \quad S_1 = \pi r^2 = \frac{l^2}{36\pi}, \quad 2r = \frac{l}{3\pi}, \quad S_2 = 4S_1 = \frac{l^2}{9\pi}.$$

Однако в этой, казалось бы простой, задаче есть физическая тонкость – вектор нормали к каждому контуру направлен так, что если смотреть из его конца, то ток течет по контуру против часовой стрелки. Значит, нормали  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$  антипараллельны. Следовательно, магнитный поток через восьмерку равен

$$\Phi = -\Phi_1 + \Phi_2 = -BS_1 + BS_2 = \frac{Bl^2}{12\pi}.$$

Так как в задаче уже задана скорость изменения магнитного поля  $\frac{\Delta B}{\Delta t}$ , то применяем формулу (2):

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta B}{\Delta t} S = -\frac{l^2}{12\pi} \frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Тогда искомый ток в проводе равен

$$I = \frac{|\mathcal{E}_i|}{R} = \frac{l^2}{12\pi R} \frac{\Delta B}{\Delta t} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ А}.$$

При решении этой и других задач рационально использовать очевидный факт: постоянный множитель можно выносить за знак приращения  $\Delta$ .

**Задача 2.** Проводящая перемычка длиной  $l$  и массой  $m$  скользит в однородном магнитном поле с индукцией  $B$  по проводящим рельсам, замкнутым на резистор сопротивлением  $R$ . Какую силу  $F$  нужно приложить к перемычке, чтобы двигать ее с постоянной скоростью  $v$ ? Коэффициент трения

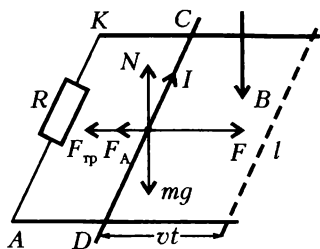


Рис. 2

перемычки о рельсы равен  $\mu$ , сопротивлением перемычки и рельсов можно пренебречь.

Так как проводник движется с постоянной скоростью  $\vec{v}$ , то его ускорение равно нулю:  $\vec{a} = 0$ . Тогда уравнение движения перемычки, т.е. второй закон Ньютона, запишем в виде (рис.2)

$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F}_A + m\vec{g} + \vec{N} = 0,$$

где  $\vec{F}_{\text{тр}}$ ,  $\vec{F}_A$ ,  $m\vec{g}$ ,  $\vec{N}$  – силы трения, Ампера, тяжести и реакции опоры соответственно. В проекциях на горизонтальное и на вертикальное направления имеем

$$F - F_{\text{тр}} - F_A = 0, \quad N - mg = 0.$$

Отсюда получаем

$$F = F_{\text{тр}} + F_A = \mu N + IBl = \mu mg + IBl,$$

где  $I$  – сила тока в перемычке. Силу тока определим, используя закон электромагнитной индукции. ЭДС индукции в замкнутом контуре равна

$$\mathcal{E}_i = -\Phi' = -(\Phi_0 + Blvt)' = -Blv,$$

где  $\Phi_0 = B \cdot KC \cdot CD$  – постоянный поток вектора  $\vec{B}$  через контур  $AKCD$ . Сила тока в контуре равна

$$I = \frac{|\mathcal{E}_i|}{R} = \frac{Blv}{R}.$$

Следовательно,

$$F = \mu mg + \frac{B^2 l^2 v}{R}.$$

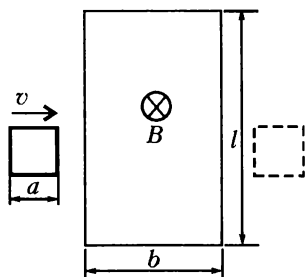


Рис. 3

**Задача 3.** Квадратную проводочную рамку со стороной  $a$  и сопротивлением  $R$  протягивают с постоянной скоростью  $v$  через зазор электромагнита (рис.3). Магнитное поле в зазоре однородное, его индукция равна  $B$  и перпендикулярна плоскости рамки. Пренебрегая краевыми эффектами, определите, какое количество теплоты выделится в рамке. Сторона рам-

ки меньше и продольного размера зазора  $b$ , и его поперечного размера  $l$ .

Очевидно, что тепло в рамке будет выделяться во время возникновения в ней электрического тока. А он будет течь, когда рамка будет частично находиться в магнитном поле. Если такое мгновенное «погружение» равно  $x$  ( $x < a$ ), то рамку пронизывает магнитный поток

$$\Phi = Bax = Bavt.$$

Значит, в рамке наводится ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = -\Phi' = -Bav.$$

Тогда через нее будет течь постоянный ток

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{Bav}{R}.$$

Следовательно, по закону Джоуля – Ленца в рамке выделится количество теплоты

$$Q = 2I^2RT,$$

где  $T = \frac{a}{v}$  – время частичного нахождения квадрата в поле, а коэффициент «2» вызван тем, что рамка и входит, и выходит из магнитного поля. Окончательно имеем

$$Q = 2 \frac{B^2 a^2 v^2}{R^2} R \frac{a}{v} = \frac{2B^2 a^3 v}{R}.$$

**Задача 4.** Два проводочных кольца разных диаметров расположены в одной плоскости в однородном магнитном поле, индукция которого с течением времени равномерно возрастает. В каком кольце индуцируется больший ток, если массы колец одинаковы и изготовлены они из одного и того же материала?

Здесь будет удобно рассмотреть одно кольцо радиусом  $R$ , а не вводить индексы «1» и «2». По условию задачи,

$$B = B_0 + kt,$$

где  $B_0$  и  $k$  – некоторые константы. Если  $\alpha$  – постоянный угол между нормалью к кольцу и вектором магнитной индукции  $\vec{B}$ , то кольцо пронизывает магнитный поток

$$\Phi = \pi R^2 (B_0 + kt) \cos \alpha.$$

По закону электромагнитной индукции ЭДС индукции в кольце



равна

$$\mathcal{E}_i = -\Phi' = -\pi R^2 k \cos \alpha.$$

Тогда ток, текущий в кольце, равен

$$I = \frac{|\mathcal{E}_i|}{r} = \frac{\pi R^2 k \cos \alpha}{r}.$$

Здесь  $r = \rho \frac{2\pi R}{S_0}$  – сопротивление кольца, где  $\rho$  – удельное сопротивление проволоки,  $S_0 = \frac{m}{2\pi R D}$  – площадь поперечного сечения проволоки,  $D$  и  $m$  – плотность и масса кольца соответственно. Окончательно получаем

$$r = \frac{4\pi^2 R^2 D \rho}{m}, \text{ и } I = \frac{km \cos \alpha}{4\pi D \rho}.$$

Видно, что все величины, входящие в последнюю формулу, одинаковы для обоих колец. Следовательно, в них индуцируются равные токи.

**Задача 5.** Проволочное кольцо радиусом  $r = 0,1$  м лежит на столе. Какой заряд протечет по кольцу, если его перевернуть

с одной стороны на другую? Сопротивление кольца  $R = 1$  Ом, вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли  $B_{\perp} = 5 \cdot 10^{-5}$  Тл.

Необходимо учесть тот факт, что вместе с кольцом переворачивается и его нормаль  $\vec{n}$  (рис.4), а также то обстоятельство, что детали процесса поворота нам неизвестны. Поэтому будем

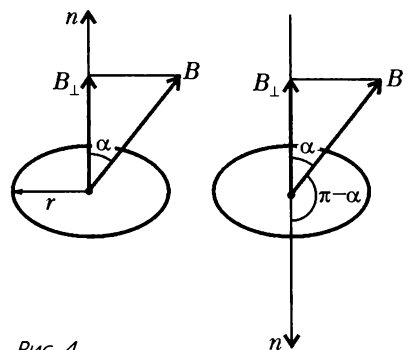


Рис. 4

считать его весьма быстрым и применим формулу (2).

Начальный магнитный поток равен

$$\Phi_1 = BS \cos \alpha = B_{\perp} S,$$

где  $S = \pi r^2$  – площадь кольца. Конечный магнитный поток составляет

$$\Phi_2 = BS \cos(\pi - \alpha) = -B_{\perp} S.$$

Значит, в контуре возникает ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = -\left(-\frac{2B_{\perp} S}{\Delta t}\right) = \frac{2B_{\perp} S}{\Delta t},$$

где  $\Delta t$  – малое время переворота кольца. Ток в кольце равен

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{2\pi r^2 B_{\perp}}{R \Delta t},$$

а искомый заряд составляет

$$q = I \Delta t = \frac{2\pi r^2 B_{\perp}}{R} = 3,14 \cdot 10^{-6} \text{ Кл} = 3,14 \text{ мкКл}.$$

**Задача 6.** В однородном магнитном поле с индукцией  $B$  вращается катушка, состоящая из  $N$  витков. Ось вращения катушки перпендикулярна ее оси и направлению магнитного поля. Период обращения катушки  $T$ , площадь поперечного сечения  $S$ . Найдите максимальную ЭДС индукции во вращающейся катушке.

Мгновенное значение магнитного потока, пронизывающего  $N$  витков катушки, равно

$$\Phi = NBS \cos \alpha,$$

где  $\alpha = \omega t$  – угол между вектором нормали к виткам катушки и вектором индукции магнитного поля (рис.5). Мгновенную ЭДС индукции определяем по формуле (1), применяя правило дифференцирования сложной функции:

$$\mathcal{E}_i = -NBS (\cos \omega t)' = NBS \omega \sin \omega t = \frac{2\pi NBS}{T} \sin \left( \frac{2\pi t}{T} \right),$$

где  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  – угловая скорость вращения катушки. Ясно, что максимальное значение ЭДС индукции равно

$$\mathcal{E}_{im} = \frac{2\pi NBS}{T}.$$

**Задача 7.** Гибкий замкнутый проводник сопротивлением  $R = 100$  кОм, образующий квадрат со стороной  $a = 0,1$  м, помещен в однородное магнитное поле с индукцией  $B = 5$  Тл. Плоскость квадрата перпендикулярна вектору магнитной индукции. Какой заряд протечет по проводнику, если из квадрата сделать равносторонний треугольник, не меняя плоскости его расположения?

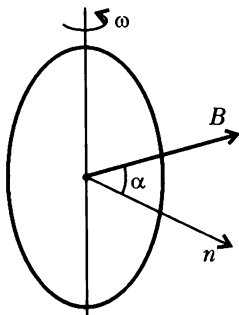


Рис. 5

В этой задаче магнитный поток через контур меняется за счет изменения его площади. Применяем формулу (2), считая процесс трансформации квадрата в треугольник достаточно быстрым.

Сначала немного геометрии – определим площадь равнобедренного треугольника со стороной  $b = \frac{4}{3}a$ :

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}b^2 \sin 60^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{9}a^2.$$

Изменение магнитного потока через контур равно

$$\Delta\Phi = BS_{\Delta} - BS_{\square} = \left( \frac{4\sqrt{3} - 9}{9} \right) a^2 B.$$

Значит, в проводнике возникает ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = \frac{(9 - 4\sqrt{3})a^2 B}{9\Delta t},$$

где  $\Delta t$  – время изменения формы контура. Индукционный ток в контуре равен

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{(9 - 4\sqrt{3})a^2 B}{9R\Delta t},$$

а искомый заряд составляет

$$q = I\Delta t = \frac{(9 - 4\sqrt{3})a^2 B}{9R} = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}.$$

**Задача 8.** На гладкой горизонтальной поверхности расположено тонкое непроводящее кольцо массой  $m$ , вдоль которого равномерно распределен заряд  $Q$ . Кольцо находится во внешнем однородном магнитном поле с индукцией, равной  $B_0$  и направленной перпендикулярно плоскости кольца. Внешнее магнитное поле выключают. По какой причине (укажите механизм) кольцо начнет вращаться? Найдите угловую скорость вращения кольца после выключения магнитного поля.

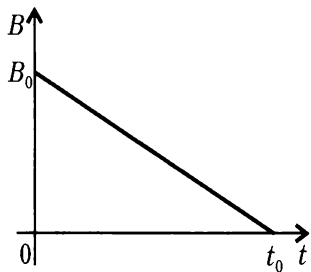


Рис. 6

Пусть магнитное поле исчезает до нуля за время  $t_0$  по простейшему линейному закону (рис.6). Очевид-

на зависимость

$$B(t) = B_0 - \frac{B_0}{t_0} t.$$

Введем радиус кольца  $R$ , помня, что он нам не дан, впрочем как и величина  $t_0$ . Мгновенный магнитный поток, пронизывающий кольцо, равен

$$\Phi = BS = \pi R^2 B_0 \left(1 - \frac{t}{t_0}\right).$$

ЭДС индукции, в силу формулы (1), равна

$$\mathcal{E}_i = \frac{\pi R^2 B_0}{t_0}.$$

Физическая причина вращения кольца такова. Переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле, силовые линии которого в каждой точке кольца направлены по касательной к нему. Это поле и действует на заряды кольца.

Найдем модуль напряженности электрического поля  $E$ . Поскольку по соображениям симметрии для любой точки кольца  $E = \text{const}$ , то, мысленно разрезав кольцо, мы вправе применить формулу  $\Delta\phi = Ed$ , где  $\Delta\phi = \mathcal{E}_i$  – разность потенциалов между точками разреза,  $d = 2\pi R$  – длина кольца. Значит,

$$E = \frac{\mathcal{E}_i}{2\pi R} = \frac{RB_0}{2t_0}.$$

Разобьем кольцо на достаточно большое число  $n$  точечных зарядов  $\Delta Q = \frac{Q}{n}$  с массой  $\Delta m = \frac{m}{n}$ . На каждый такой заряд будет действовать сила (рис.7)

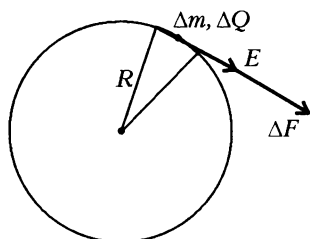


Рис. 7

$$\Delta F = E\Delta Q = \frac{B_0 Q}{2} \frac{R}{t_0 n}.$$

По второму закону Ньютона модуль линейного ускорения любого элемента кольца равен

$$a = \frac{\Delta F}{\Delta m} = \frac{B_0 Q}{2m} \frac{R}{t_0}.$$

Соответствующее угловое ускорение, равное

$$\epsilon = \frac{a}{R} = \frac{B_0 Q}{2mt_0},$$

постоянно. Следовательно, искомая угловая скорость вращения кольца равна

$$\omega = \varepsilon t_0 = \frac{B_0 Q}{2m}.$$

Как видим, введенные неизвестные величины  $t_0$  и  $R$ , которые нам были необходимы для решения, сократились.

### Упражнения

1. Катушка диаметром  $d = 10$  см помещена в магнитное поле с индукцией  $B = 1,256 \cdot 10^{-2}$  Тл так, что ее ось совпадает с направлением линий магнитной индукции. Катушка содержит  $N = 500$  витков и имеет сопротивление  $R = 10$  Ом. Найдите заряд, который пройдет через обмотку катушки, если магнитное поле равномерно упадет до нуля.

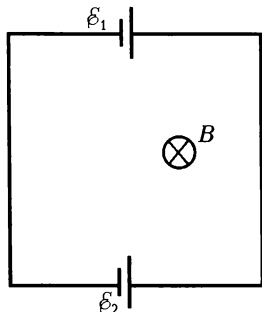


Рис. 8

2. Из провода длиной  $l = 2$  м, обладающего сопротивлением  $R = 4$  Ом, спаян квадрат. В стороны квадрата включены источники с ЭДС  $\varepsilon_1 = 10$  В и  $\varepsilon_2 = 8$  В согласно схеме, приведенной на рисунке 8. Цепь помещена в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости квадрата, направленное за чертеж и возрастающее во времени

по закону  $B = kt$ , где  $k = 16$  Тл/с. Найдите силу тока в цепи. Внутренним сопротивлением источников пренебречь.

3. Из куска однородной проволоки длиной  $l$  и сопротивлением  $R$  спаяна фигура в виде кольца с хордой, равной диаметру кольца. Кольцо помещают в однородное магнитное поле, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости кольца, а модуль этого вектора меняется со временем по закону  $B = kt$ . Найдите выделяемую в проволоке мощность.

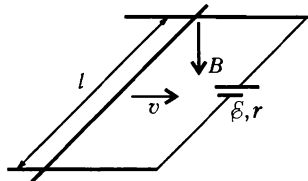


Рис. 9

4. В магнитном поле с индукцией, равной  $B = 1$  Тл и направленной вертикально вниз, по горизонтальным рельсам равномерно движется проводящий стержень длиной  $l = 0,4$  м со скоростью  $v = 5$  м/с (рис.9). Концы рельсов при-

соединены к батарее с ЭДС  $\varepsilon = 10,1$  В и внутренним сопротивлением  $r = 0,1$  Ом. Какое количество теплоты выделится в стержне за время  $t = 10$  с, если его сопротивление  $R = 10$  Ом? Сопротивлением рельсов и соединительных проводов пренебречь.

5. По П-образной рамке, наклоненной под углом  $30^\circ$  к горизонту и помещенной в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоско-

сти рамки, начинает соскальзывать без трения перемычка массой 30 г. Длина перемычки 10 см, ее сопротивление 2 мОм, индукция поля 0,1 Тл. Найдите установившуюся скорость движения перемычки. Сопротивлением рамки пренебречь.

6. Энергия магнитного поля катушки электромагнита с индуктивностью  $L = 0,2$  Гн равна  $W = 5$  Дж. Определите величину ЭДС самоиндукции, возникающей к катушке при равномерном уменьшении силы тока за время  $t = 0,1$  с.

7. В простейшей схеме магнитного гидродинамического генератора плоский конденсатор с площадью пластин  $S$  и

расстоянием между ними  $d$  помещен в поток проводящей жидкости с удельным сопротивлением  $\rho$ , движущейся с постоянной скоростью  $v$  параллельно пластинам (рис.10). Конденсатор находится в магнитном поле с индукцией, равной  $B$ , направленной вдоль пластин и перпендикулярной скорости жидкости. Найдите полезную мощность, выделяющуюся в виде тепла на внешней нагрузке сопротивлением  $R$ .

8. Металлический стержень  $AC$  одним концом (точка  $A$ ) шарнирно закреплен на вертикальном диэлектрическом стержне  $AO$  (рис.11). Другой конец (точка  $C$ ) связан с вертикальным стержнем с помощью нерастяжимой непроводящей горизонтальной нити  $OC$  длиной  $l = 1$  м. Стержень  $AC$  вращается вокруг стержня  $AO$  в однородном магнитном поле, индукция которого вертикальна и равна  $B = 10^{-2}$  Тл. Угловая скорость вращения стержня  $\omega = 60$  с $^{-1}$ . Определите разность потенциалов (по модулю) между точками  $A$  и  $C$ .

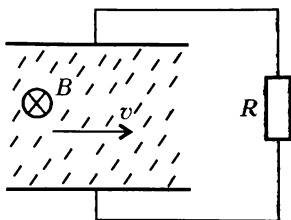


Рис. 10

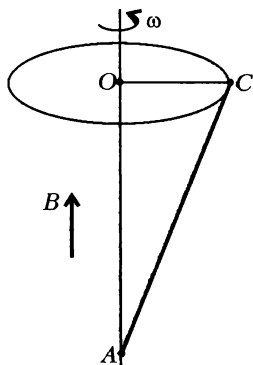


Рис. 11

## ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ

А. Черноуцан

Одна из важных задач теории колебаний – найти период малых колебаний механической системы около положения равновесия. В школьном курсе физики количественно рассматриваются колебания систем только с одной степенью свободы (положение которых задается одним параметром – смещением, углом отклонения и т.д.) и происходящие без потерь энергии. Простейшие примеры таких систем – груз на пружине и математический маятник.

Обычно колебания таких систем изучаются *динамическим* методом. Этот метод состоит в приведении уравнения движения системы (второго закона Ньютона) к виду, соответствующему *уравнению гармонических колебаний*

$$x'' + \omega^2 x = 0, \quad (1)$$

где  $x''$  – вторая производная от параметра  $x$  по времени.

Однако в некоторых случаях школьнику оказывается сложно записать уравнение движения. Это относится в первую очередь к системам с распределенной массой. Например, для получения уравнения колебаний протяженного твердого тела – *физического маятника* – нужно записать уравнение динамики вращательного движения, но его в школе не изучают. И тут, как всегда, на помощь приходит закон сохранения энергии, который позволяет существенно расширить круг задач, доступных для решения школьными методами.

В чем же заключается *энергетический* метод исследования колебаний? Можно сказать, что он состоит в сопоставлении энергии колебательной системы с энергией простейшего маятника – груза массой  $m$  на пружине жесткостью  $k$ . Если выражение для механической энергии системы, отклонение которой от положения равновесия определяется параметром  $x$ , удалось привести к виду

$$E = \frac{m_{\text{эф}} x'^2}{2} + \frac{k_{\text{эф}} x^2}{2}, \quad (2)$$

то система совершает гармонические колебания

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

циклическая частота которых равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{эф}}}{m_{\text{эф}}}}. \quad (3)$$

Коэффициент  $m_{\text{эф}}$  в выражении для кинетической энергии называют *эффективной массой* (обычно она совпадает с массой системы), а коэффициент  $k_{\text{эф}}$  в выражении для потенциальной энергии – *эффективной жесткостью*. Действительно, поскольку механическая энергия сохраняется, производная от нее по времени равна нулю:

$$E'(t) = 0 = m_{\text{эф}} x' x'' + k_{\text{эф}} x x'$$

и выполняется уравнение гармонических колебаний (1):

$$x'' + \frac{k_{\text{эф}}}{m_{\text{эф}}} x = 0.$$

Для примера того, как работает энергетический метод, покажем, как с его помощью найти циклическую частоту колебаний математического маятника с массой груза  $m$  и длиной нити  $l$ . В качестве параметра  $x$  выберем смещение груза маятника вдоль дуги окружности из положения равновесия. Кинетическая энергия маятника равна  $mx'^2/2$ , т.е. эффективная масса равна массе груза. Потенциальная энергия для малых отклонений ( $x \ll l$ ) равна

$$E_{\text{п}} = mgh = mgl(1 - \cos \alpha) = 2mgl \sin^2 \frac{\alpha}{2} = mgl \frac{\alpha^2}{2} = \frac{mg}{l} \frac{x^2}{2}, \quad (4)$$

где  $\alpha = x/l$  – угол отклонения маятника. Таким образом, эффективная жесткость равна  $mg/l$ , а циклическая частота колебаний составляет

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{эф}}}{m_{\text{эф}}}} = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Теперь перейдем к рассмотрению задач с протяженными телами.

**Задача 1.** *Стержень длиной  $l = 40$  см изогнули по дуге окружности в виде полукольца и с помощью невесомых спиц прикрепили к горизонтальной оси, проходящей через центр окружности. Найдите циклическую частоту малых колебаний полукольца около положения равновесия, если ось вращения*



перпендикулярна его плоскости. Ускорение свободного падения  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ .

В качестве параметра  $x$ , определяющего положение системы, выберем смещение точек стержня вдоль дуги окружности из положения равновесия (рис. 1).

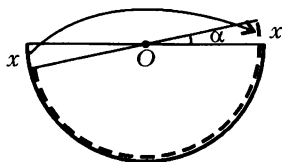


Рис. 1

Тогда кинетическая энергия маятника равна  $mx'^2/2$ , т.е. эффективная масса равна массе стержня. Расчет потенциальной энергии стержня на первый взгляд кажется сложной задачей – ведь мы не знаем положение центра тяжести.

Однако существует простое рассуждение, основанное на симметрии стержня. При повороте стержня на угол  $\alpha = x/R$  (здесь  $R$  – радиус кольца) большая его часть перейдет сама в себя, и для подсчета потенциальной энергии можно будет считать, что мы перенесли кусочек длиной  $x$  и массой  $mx/l$  с одного конца стержня на другой (это хорошо видно на рисунке 1). При этом центр кусочка сместится вверх на  $x$ , т.е. изменение потенциальной энергии стержня составит

$$E_{\text{п}} = \frac{mx}{l} gx = \frac{2mg}{l} \frac{x^2}{2} \quad (5)$$

(потенциальная энергия колебательной системы в положении равновесия всегда принимается равной нулю). Значит, эффективная жесткость системы составляет  $k_{\text{эф}} = 2mg/l$ , а циклическая частота малых колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{эф}}}{m_{\text{эф}}}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} = 7 \text{ с}^{-1}.$$

**Задача 2.** В U-образную трубку сечением  $S = 10 \text{ см}^2$  налили  $m = 400 \text{ г}$  воды. Пренебрегая трением, найдите циклическую частоту вертикальных колебаний жидкости в трубке.

Ускорение свободного падения  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ .

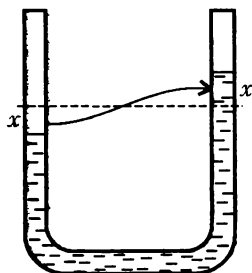


Рис. 2

Поскольку вода в разных коленах трубки движется в разных направлениях, не очень ясно, как корректно записать уравнение движения жидкости. Проще найти энергию жидкости. Если вода сместилась на  $x$  из положения равновесия, то, как и в предыдущей задаче, можно считать, что столбик воды длиной  $x$  и массой  $\rho Sx$  переместился из одного

колена в другое (рис.2). Изменение потенциальной энергии воды при этом равно

$$E_{\text{п}} = (\rho S x) g x = 2\rho g S \frac{x^2}{2},$$

где  $\rho = 1 \text{ г/см}^3$  – плотность воды. Итак, эффективная жесткость равна  $k_{\text{эф}} = 2\rho g S$ , эффективная масса равна массе воды, а циклическая частота колебаний составляет

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{эф}}}{m_{\text{эф}}}} = \sqrt{\frac{2\rho g S}{m}} = 7 \text{ с}^{-1}.$$

**Задача 3.** Невесомый стержень изогнули в виде дуги, составляющей  $1/3$  длины окружности радиусом  $R = 5 \text{ см}$ , и с помощью невесомых спиц прикрепили к горизонтальной оси, проходящей через центр окружности перпендикулярно ее плоскости. К концам стержня прикрепили два одинаковых груза. Найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

В качестве параметра, определяющего отклонение системы от положения равновесия, примем (для разнообразия) малый угол отклонения  $\alpha$ . Кинетическая энергия системы равна

$$E_{\text{к}} = 2 \frac{mv^2}{2} = \frac{2mR^2\omega^2}{2} = 2mR^2 \frac{\alpha'^2}{2},$$

т.е. эффективная масса равна  $m_{\text{эф}} = 2mR^2$  (здесь  $m$  – масса груза). Потенциальную энергию удобно выразить через изменение высоты центра тяжести, который расположен посередине между грузами на расстоянии  $l = R \cos 60^\circ = R/2$  под точкой подвеса:

$$E_{\text{п}} = 2mgl(1 - \cos \alpha) = 2mgl \frac{\alpha^2}{2} = mgR \frac{\alpha^2}{2}.$$

Следовательно, эффективная жесткость равна  $k_{\text{эф}} = mgR$ , и циклическая частота малых колебаний составляет

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{эф}}}{m_{\text{эф}}}} = \sqrt{\frac{g}{2R}} = 10 \text{ с}^{-1}.$$

Попробуйте для упражнения получить этот ответ, выбрав в качестве параметра не угол  $\alpha$ , а более привычное смещение груза  $x = R\alpha$ .

**Задача 4.** Стержень массой  $M = 20 \text{ г}$  и длиной  $l = 118 \text{ см}$  изогнули в форме полукольца и с помощью невесомых спиц прикрепили к горизонтальной оси, проходящей через центр

кольца перпендикулярно его плоскости. К середине стержня прикрепili груз массой  $m = 100$  г. Найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>; число  $\pi = 3,14$ .

Эту задачу можно считать объединением примера с математическим маятником и задачи 1 с полукольцом. Соответственно, для вычисления потенциальной энергии надо применять и метод вычисления высоты при малом угле отклонения (формула (4)), и метод «перемещения кусочка» из задачи 1 (формула (5)):

$$E_{\text{п}} = mgR(1 - \cos \alpha) + \\ + \frac{Mx}{l}gx = \frac{mg}{R} \frac{x^2}{2} + \frac{2Mg}{l} \frac{x^2}{2} = \frac{(\pi m + 2M)g}{l} \frac{x^2}{2}.$$

Поскольку кинетическая энергия системы равна

$$E_{\text{к}} = (m + M) \frac{x'^2}{2},$$

для циклической частоты малых колебаний получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{эф}}}{m_{\text{эф}}}} = \sqrt{\frac{\pi m + 2M}{m + M} \frac{g}{l}} = 5 \text{ с}^{-1}.$$

**Задача 5.** Невесомый стержень длиной  $l = 3,5$  м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. К свободному концу стержня прикрепili груз массой  $m$ , а к середине стержня – груз массой  $3m$ . Найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. Ускорение свободного падения  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>.

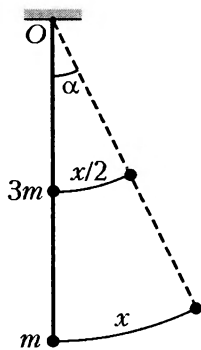


Рис. 3

В качестве параметра отклонения выбираем смещение  $x$  нижнего груза вдоль дуги окружности (рис.3). Смещение верхнего груза при этом составляет  $x/2$ , а кинетическая энергия системы равна

$$E_{\text{к}} = \frac{mx'^2}{2} + \frac{3m(x'/2)^2}{2} = 1,75m \frac{x'^2}{2},$$

т.е. эффективная масса системы для этого параметра отклонения составляет  $m_{\text{эф}} = 1,75m$ . Потенциальная энергия системы равна

$$E_{\text{п}} = mgl(1 - \cos \alpha) + 3mg \frac{l}{2}(1 - \cos \alpha) = \frac{2,5mg}{l} \frac{x^2}{2},$$

т.е.  $k_{\text{эф}} = 2,5mg/l$ . Для циклической частоты малых колебаний получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{эф}}}{m_{\text{эф}}}} = \sqrt{\frac{10}{7} \frac{g}{l}} = 2 \text{ с}^{-1}.$$

Попробуйте получить этот же ответ, выбрав в качестве параметра отклонения угол  $\alpha = x/l$ .

**Задача 6.** Невесомый стержень длиной  $l = 50$  см может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. К свободному концу стержня прикрепили груз массой  $m = 0,5$  кг, а середину стержня с помощью горизонтальной пружины жесткостью  $k = 32$  Н/м соединили с вертикальной опорой (рис. 4). При вертикальном расположении стержня пружина не деформирована. Найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

За параметр отклонения возьмем смещение груза  $x$  из положения равновесия вдоль дуги окружности. При таком смещении деформация пружины равна  $x/2$ , и потенциальная энергия системы имеет вид

$$E_{\text{п}} = \frac{mg}{l} \frac{x^2}{2} + k \frac{(x/2)^2}{2} = \left( \frac{mg}{l} + \frac{k}{4} \right) \frac{x^2}{2}.$$

Очевидно, что эффективная масса равна массе груза. Тогда циклическая частота малых колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{эф}}}{m_{\text{эф}}}} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{4m}} = 6 \text{ с}^{-1}.$$

**Задача 7.** Около дна горизонтального полого цилиндра катается взад-вперед маленькое тонкое колечко, оставаясь все время в вертикальной плоскости, перпендикулярной оси цилиндра. Найдите циклическую частоту такого колебательного движения. Внутренний радиус цилиндра  $R = 1,25$  м, ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

При качении без проскальзывания трение покоя работу не совершает, и механическая энергия сохраняется.

Для решения этой задачи надо знать, что кинетическая энергия катящегося со скоростью  $v$  колечка (обруча, тонкостен-

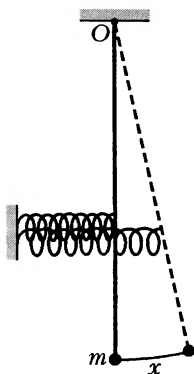


Рис. 4

ного цилиндра) массой  $m$  равна

$$E_k = mv^2.$$

Это утверждение является следствием общей теоремы о том, что кинетическая энергия любой системы может быть представлена в виде суммы двух слагаемых: кинетической энергии поступательного движения системы как целого со скоростью центра масс и кинетической энергии в системе отсчета, связанной с центром масс:

$$E_k = \frac{mv_{\text{ц}}^2}{2} + E_{\text{отн}}.$$

В случае катящегося колечка относительное движение представляет собой чистое вращение колечка вокруг своей оси. Из условия отсутствия проскальзывания следует, что линейная скорость вращения равна  $v_{\text{ц}}$ , т.е. кинетическая энергия такого вращения есть  $mv_{\text{ц}}^2/2$ .

Впрочем, можно вывести это утверждение специально для колечка, не опираясь ни на какие дополнительные теоремы. Для этого надо рассмотреть два маленьких диаметрально противоположных элемента кольца массой  $\Delta m$  каждый, вычислить их скорости по закону сложения скоростей (с помощью теоремы косинусов) и убедиться, что их полная кинетическая энергия равна  $2\Delta mv_{\text{ц}}^2$ .

Если в качестве параметра отклонения выбрать смещение  $x$  колечка от нижней точки по дуге окружности (рис.5), то энергия колечка запишется в виде

$$E = 2m \frac{x'^2}{2} + \frac{mg}{R} \frac{x^2}{2}$$

(см. формулу (4)). Циклическая частота колебательного движения колечка равна

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{2R}} = 2 \text{ с}^{-1}.$$

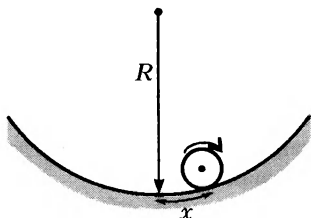


Рис. 5

Следующие три задачи показывают, как работает энергетический метод в том случае, когда взаимодействие осуществляется электростатическими силами.

**Задача 8.** Стержень массой  $m = 30 \text{ г}$  изогнули в форме дуги, составляющей  $1/6$  длины окружности радиусом  $R = 0,1 \text{ м}$ , и с помощью невесомых спиц прикрепили к оси, проходящей через центр окружности перпендикулярно ее плоскости. На концах стержня закрепили одинаковые положительные точечные заряды величиной  $q = 0,1 \text{ мкКл}$  каждый. Стержень находится в поле неподвижного точечного заряда  $Q = 0,2 \text{ мкКл}$ , расположенного посередине между концами стержня. Найдите цикли-

ческую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. Силу тяжести не учитывать.

В качестве параметра отклонения выберем смещение  $x$  каждого из зарядов  $q$  вдоль дуги окружности (рис.6; здесь  $\varphi = 30^\circ$ ). Кинетическая энергия системы сводится к кинетической энергии стержня:

$$E_k = \frac{mx'^2}{2}.$$

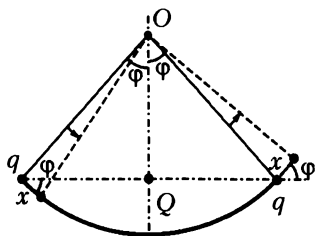


Рис. 6

Изменение потенциальной энергии системы при малом смещении стержня с зарядами равно

$$\begin{aligned} E_{\text{п}} &= \left( k \frac{qQ}{R \sin \varphi + x \cos \varphi} + k \frac{qQ}{R \sin \varphi - x \cos \varphi} \right) - 2k \frac{qQ}{R \sin \varphi} = \\ &= 2k \frac{qQR \sin \varphi}{(R \sin \varphi)^2 - (x \cos \varphi)^2} - 2k \frac{qQ}{R \sin \varphi} = \\ &= 2k \frac{qQR \sin \varphi \cdot ((R \sin \varphi)^2 + (x \cos \varphi)^2)}{(R \sin \varphi)^4 - (x \cos \varphi)^4} - 2k \frac{qQ}{R \sin \varphi} = \\ &= 4k \frac{qQ \cos^2 \varphi}{R^3 \sin^3 \varphi} \frac{x^2}{2} = 24k \frac{qQ}{R^3} \frac{x^2}{2}, \end{aligned}$$

где  $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$  — электрическая постоянная. Для циклической частоты колебаний получаем

$$\omega = \sqrt{24k \frac{qQ}{mR^3}} = 12 \text{ с}^{-1}.$$

**Задача 9.** Стержень массой  $m = 25 \text{ г}$  изогнули в виде дуги, составляющей  $1/3$  длины окружности радиусом  $R = 60 \text{ см}$ , и с помощью невесомых спиц прикрепили к оси, проходящей через центр окружности перпендикулярно ее плоскости. Стержень равномерно заряжен положительным зарядом с линейной плотностью  $\lambda = 2 \text{ мКл/м}$  и находится в поле неподвижного отрицательного точечного заряда  $Q = -6 \text{ мКл}$ , расположенного посередине между концами стержня. Найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. Силу тяжести не учитывать.

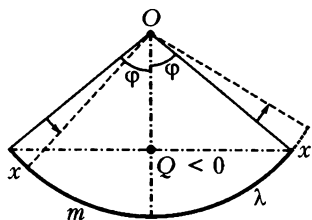


Рис. 7

В качестве отклоняющего параметра  $x$  выберем смещение точек стержня из положения равновесия вдоль дуги окружности (рис. 7; здесь  $\varphi = 60^\circ$ ). Кинетическая энергия стержня равна  $mx'^2/2$ . Для вычисления потенциальной энергии применим метод «перемещения малого кусочка», который мы использовали в задачах 1 и 2:

$$E_{\text{п}} = k \frac{\lambda x \cdot Q}{R \sin \varphi + \frac{x}{2} \cos \varphi} - k \frac{\lambda x \cdot Q}{R \sin \varphi - \frac{x}{2} \cos \varphi} =$$

$$= -k \frac{\lambda x \cdot Q \cdot x \cos \varphi}{(R \sin \varphi)^2 - \left(\frac{x}{2} \cos \varphi\right)^2} = -\frac{2k\lambda Q \cos \varphi}{(R \sin \varphi)^2} \frac{x^2}{2} = \frac{4}{3} \frac{k\lambda |Q|}{R^2} \frac{x^2}{2}.$$

Циклическая частота малых колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{4k\lambda |Q|}{3mR^2}} = 4 \text{ с}^{-1}.$$

**Задача 10.** На концах невесомого стержня длиной  $l = 10$  см закреплены маленькие шарики массой  $m = 9$  г каждый. На шарики наносят разноименные заряды одинаковой величины  $q = 3$  мкКл и помещают эту систему в однородное электрическое поле напряженностью  $E = 600$  В/м. Найдите циклическую частоту малых колебаний системы около положения равновесия. Силу тяжести не учитывать.

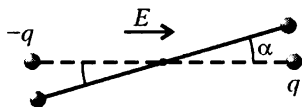


Рис. 8

Поскольку сумма сил, действующих на систему, равна нулю, система отсчета центра масс инерциальная, и можно считать, что середина

стержня неподвижна. За параметр, характеризующий отклонение системы от положения равновесия, примем угол поворота стержня  $\alpha$  (рис. 8). Кинетическая энергия системы имеет вид

$$E_{\text{к}} = 2 \frac{m(\alpha' l/2)^2}{2} = \frac{ml^2}{2} \frac{\alpha'^2}{2},$$

т.е. эффективная масса равна  $m_{\text{эф}} = ml^2/2$ . Изменение потенциальной энергии при повороте на малый угол  $\alpha$  равно работе

электрического поля, взятой с противоположным знаком:

$$E_{\pi} = 2qE \frac{l}{2} (1 - \cos \alpha) = qEl \frac{\alpha^2}{2},$$

т.е. эффективная жесткость равна  $k_{\text{эф}} = qEl$ . Для циклической частоты малых колебаний получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{эф}}}{m_{\text{эф}}}} = \sqrt{\frac{2qE}{ml}} = 2 \text{ с}^{-1}.$$

В последней задаче рассматривается ситуация, когда колебания как таковые отсутствуют, поскольку система движется в одном направлении, без возврата назад. Однако оказывается, что это движение происходит по такому же закону гармонических колебаний, как и движение маятника (в фазе разгона или торможения).

**Задача 11.** Длинную трубку согнули под прямым углом и установили так, что одно из колен смотрит вертикально вверх. В вертикальном колене удерживают веревку длиной  $l = 90$  см таким образом, что она доходит до места сгиба. Через какое время (в мс) после того, как веревку отпустят, она наполовину соскользнет в горизонтальное колено? Трением пренебречь. Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ; число  $\pi = 3,14$ .

Если в момент времени  $t$  длина веревки, оставшейся в вертикальном колене, равна  $x$  (рис.9), то энергия системы имеет вид

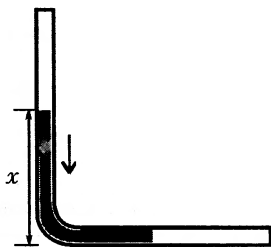


Рис. 9

$$E = \frac{mx'^2}{2} + \frac{mx}{l} g \frac{x}{2} = \frac{mx'^2}{2} + \frac{mg}{l} \frac{x^2}{2},$$

где  $mx/l$  — масса куска веревки в вертикальном колене,  $x/2$  — высота центра тяжести этого куска. Поскольку это выражение идентично выражению для энергии гармонических колебаний с частотой  $\omega = \sqrt{g/l}$ , а начальная скорость равна нулю, то движение происходит по закону

$$x = l \cos \omega t$$

(в начальный момент  $x_0 = l$ ). Эта формула действует только в течение четверти периода, пока  $x$  не обратится в ноль, т.е. пока вся веревка не соскользнет в горизонтальное колено. Чтобы найти искомое время, надо подставить  $x = l/2$ . Решив уравне-



ние, описывающее движение веревки, получим

$$t = \frac{\pi}{3\omega} = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{l}{g}} = 314 \text{ мс.}$$

### Упражнения

1. Тонкое колесо массой  $M = 400$  г с невесомыми спицами может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси. На колесе закрепили маленький груз массой  $m = 100$  г. Найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. Радиус колеса  $R = 50$  см. ( $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.)

2. Невесомый стержень длиной  $l = 2,5$  м согнули посередине под углом  $120^\circ$ , прикрепили к его концам одинаковые грузы и повесили местом сгиба на тонкий гвоздь, вбитый в стену. Пренебрегая трением, найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. ( $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.)

3. Невесомый стержень длиной  $l = 40$  см может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. К середине стержня прикрепили груз массой  $m = 0,5$  кг, а нижний конец стержня с помощью горизонтальной пружины жесткостью  $k = 30$  Н/м соединили с вертикальной опорой. При вертикальном расположении стержня пружина не деформирована. Найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. ( $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>.)

4. Невесомый стержень изогнули в виде дуги, составляющей  $1/3$  длины окружности радиусом  $R = 5$  см, и с помощью невесомых спиц прикрепили к горизонтальной оси, проходящей через центр окружности перпендикулярно ее плоскости. К концам стержня прикрепили два одинаковых груза массой  $m = 40$  г каждый. Стержень равномерно заряжен с линейной плотностью  $\lambda = 1$  мкКл/м и находится в поле неподвижного точечного заряда  $Q = 5$  мкКл, расположенного под осью вращения на одном уровне с концами стержня. Найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. ( $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.)

5. Тонкую цепочку длиной  $l = 45$  см удерживают за верхний конец на гладкой наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом. Через какое время (в мс) после освобождения цепочки она полностью покинет наклонную плоскость, если вначале ее нижний конец находился у края наклонной плоскости? ( $g = 10$  м/с<sup>2</sup>;  $\pi = 3,14$ .)

## ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

*В. Можаев*

В том случае, когда при наложении световых волн происходит не суммирование их интенсивностей, а пространственное перераспределение энергии светового излучения, говорят об интерференции волн. Однако наши повседневные наблюдения показывают, что освещенность, создаваемая двумя или несколькими световыми пучками, является простым сложением освещенностей, создаваемых отдельными пучками. Возникает вопрос: почему же мы не наблюдаем в этих случаях интерференцию световых волн? Попробуем на него ответить.

Условием интерференции волн с одинаковыми частотами является их *когерентность*. Это очень важное понятие, поэтому остановимся на нем более подробно.

Уравнение плоской электромагнитной волны с длиной волны  $\lambda$ , распространяющейся вдоль оси  $X$ , имеет вид

$$E(x, t) = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \varphi_0\right),$$

где  $E$  — напряженность электрического поля волны,  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$  — частота,  $c$  — скорость света в вакууме,  $\varphi_0$  — начальная фаза. Выражение в скобках (аргумент косинуса) называется фазой волны  $\varphi$ . Если эта же волна распространяется в среде с показателем преломления  $n$ , то зависимость  $E(x, t)$  будет такой:

$$E(x, t) = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} nx + \varphi_0\right).$$

В среде в  $n$  раз уменьшается длина волны, но обычно ее сохраняют, а путь, пройденный волной, умножают на  $n$  и называют это произведение оптическим путем. Это удобно — не надо думать об изменении длины волны.

Пусть теперь две такие волны приходят в одну точку (напри-

мер, на экране):

$$E_1 = E_{01} \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} l_1 + \varphi_{01} \right),$$
$$E_2 = E_{02} \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} l_2 + \varphi_{02} \right),$$

где  $l_1$  и  $l_2$  – оптические пути, пройденные волнами до встречи. Разность фаз между этими волнами в данной точке равна

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (l_2 - l_1) + \varphi_{01} - \varphi_{02}.$$

Как видно, разность фаз  $\Delta\varphi$  не зависит от времени. Такие колебания, сдвиг фаз между которыми остается постоянным по крайней мере за время наблюдения, и называют когерентными.

Рассмотренные нами две монохроматические волны с одинаковыми длинами волн всегда когерентны, но дело в том, что монохроматических волн (со строго определенной длиной волны) в природе не существует – это чисто математическое понятие. Реальные волны всегда имеют разброс длин волн в некотором интервале  $\Delta\lambda$  около средней длины волны  $\lambda_{\text{ср}}$ . Когда  $\Delta\lambda \ll \lambda_{\text{ср}}$ , говорят о *квазимонохроматических* (почти монохроматических) волнах. И это принципиально – они всегда «квази», но никогда не монохроматические.

Квазимонохроматическую волну можно рассматривать как кусок, или цуг, монохроматической волны, такой цуг всегда имеет начало и конец. Поэтому у волн от двух реальных источников даже с одинаковыми средними длинами волн начальные фазы  $\varphi_{01}$  и  $\varphi_{02}$  хаотически изменяются со временем, а не остаются постоянными, как в случае монохроматической волны. Следовательно, и разность фаз  $\Delta\varphi$  между волнами за время наблюдения не остается постоянной, а хаотически изменяется во времени. Такие волны не когерентны, и они не интерферируют.

По этой причине независимых когерентных источников не существует, а для наблюдения интерференции обычно используют оптические интерференционные схемы, в которых из одного реального источника получают два когерентных источника. Ниже мы рассмотрим такие оптические схемы.

Любой интерференционный опыт всегда можно представить в виде эквивалентной оптической схемы, состоящей из двух когерентных источников и экрана, на котором наблюдается интерференционная картина. Эти два когерентных источника могут быть или оба мнимые, или один действительный, а другой мнимый, или оба действительные.

**Задача 1.** Два точечных когерентных квазимонохроматических источника света, расстояние между которыми  $d$ , находятся на расстоянии  $L$  от экрана ( $L \gg d$ ). Определите ширину интерференционных полос в наблюдаемой интерференционной картине, если длина волны света равна  $\lambda$ .

Найдем распределение интенсивности (освещенности) света на экране вдоль оси  $OY$  (рис.1). Рассмотрим произвольную точку с координатой  $y$ . Пусть силы света наших источников равны, а разность оптических путей мала:  $r_2 - r_1 \ll r_1$ . В этом случае можно считать, что амплитуды сферических волн в точке с координатой  $y$  одинаковы – обозначим эту амплитуду через  $E_0$ . Тогда напряженность электрического поля в нашей точке от верхнего источника можно записать в виде

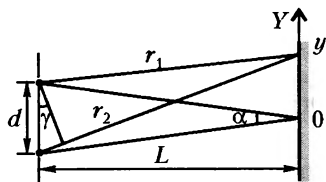


Рис. 1

$$E(r_1, t) = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_1\right),$$

где  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ , а начальную фазу положим равной нулю. Аналогичное выражение получаем для поля от нижнего источника:

$$E(r_2, t) = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_2\right).$$

Практически все приемники света (фотоэлементы, наш глаз) реагируют на освещенность  $I$  света, т.е. на квадрат амплитуды электрического поля:  $I \sim E_0^2$ . Найдем освещенность света в нашей точке:

$$\begin{aligned} I(y, t) &= \left( E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_1\right) + E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_2\right) \right)^2 = \\ &= E_0^2 \cos^2\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_1\right) + E_0^2 \cos^2\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_2\right) + \\ &\quad + 2E_0^2 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_1\right) \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_2\right) = \\ &= E_0^2 \cos^2\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_1\right) + E_0^2 \cos^2\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_2\right) + \\ &\quad + E_0^2 \cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (r_1 + r_2)\right) + E_0^2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1)\right). \end{aligned}$$

Обычные приемники света не реагируют на частоту света

(  $\sim 10^{15}$  Гц ), а воспринимают усредненную по времени интенсивность света. Среднее значение функции  $f(t)$  за интервал времени  $T$  равно

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt .$$

Поэтому усредненная за период освещенность будет равна

$$I(y) = E_0^2 + E_0^2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)\right).$$

Оптическая разность хода составляет (см. рис.1)

$$r_2 - r_1 \approx d\gamma \approx d \frac{y}{L} \approx y\alpha .$$

Угол  $\alpha$  обычно называют углом сходимости интерферирующих лучей. Окончательное распределение интенсивности света запишем в виде

$$I(y) = E_0^2 \left( 1 + \cos\left(\frac{2\pi\alpha y}{\lambda}\right) \right).$$

Эта зависимость  $I(y)$  изображена на рисунке 2.

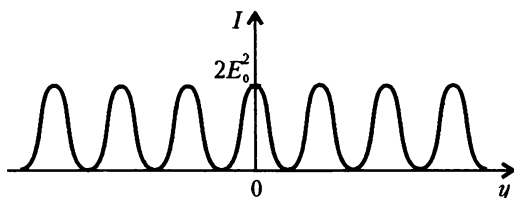


Рис. 2

Шириной интерференционных полос называют расстояние между двумя соседними максимумами (или минимумами). Максимальная интенсивность света будет наблюдаться при условии, что

$$\frac{2\pi\alpha y_m}{\lambda} = 2\pi m, \text{ где } m = 0, 1, 2 \dots$$

Тогда ширина полос будет равна

$$\delta = y_{m+1} - y_m = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda L}{d} .$$

Как видно, ширина интерференционных полос прямо пропорциональна длине волны и обратно пропорциональна углу сходимости интерферирующих лучей.

Перейдем к разбору конкретных интерференционных схем.

**Задача 2.** Параллельный пучок света, полученный с помощью точечного источника света  $S$ , расположенного в фокусе собирающей линзы, падает на бипризму с преломляющим углом  $\beta = 1^\circ$

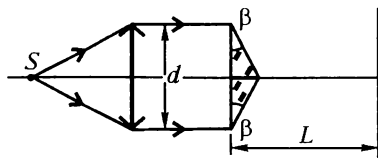


Рис. 3

На каком расстоянии  $L$  нужно расположить экран, чтобы на нем можно было наблюдать максимальное число интерференционных полос? Чему равно это количество полос? Длина волны света  $\lambda = 0,65 \text{ мкм}$ , показатель преломления материала призмы  $n = 1,5$ , а поперечный размер пучка  $d = 1 \text{ см}$ .

После прохождения призмы световой пучок разобьется на два параллельных пучка, распространяющихся под углами  $\gamma$  к горизонтальной оси (рис.4). При малом угле  $\beta$

$$\gamma = (n - 1)\beta.$$

На рисунке 4 хорошо видна область пересечения этих пучков. Именно в этой области и можно наблюдать интерференционную картину.

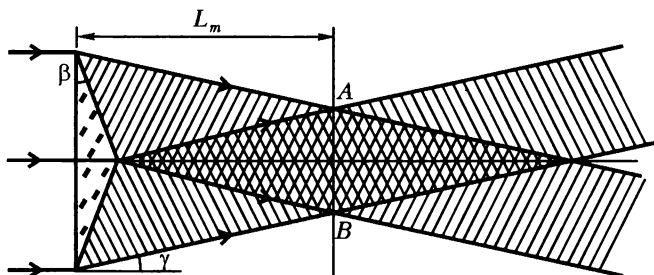


Рис. 4

Найдем ширину интерференционных полос. Из рисунка 4 угол сходимости пучков в данной интерференционной схеме равен

$$\alpha = 2\gamma = 2(n - 1)\beta.$$

Воспользовавшись выражением для ширины полос, полученным в задаче 1, можно записать

$$\delta = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda}{2(n - 1)\beta}.$$

Как видно, ширина полос не зависит от положения экрана, на

котором наблюдается интерференционная картина. Поэтому максимальное число интерференционных полос будет в месте максимального перекрытия пучков, т.е. в области АВ. Из простых геометрических соображений найдем соответствующее расстояние  $L$  от призмы до экрана:

$$L = \frac{d/4}{\operatorname{tg} \gamma} \approx \frac{d}{4\gamma} = \frac{d}{4(n-1)\beta} = 28,7 \text{ см.}$$

Размер интерференционной картины на экране, установленном на расстоянии  $L$ , при условии тонкой призмы равен  $d/2$ . Поэтому максимальное число полос равно

$$m_{\max} = \frac{d/2}{\delta} = \frac{d(n-1)\beta}{\lambda} = 134.$$

Разобранный в данной задаче интерференционный опыт является примером того, когда эквивалентная интерференционная схема состоит из двух когерентных источников, которые являются мнимыми изображениями нашего реального источника  $S$ . Эти два мнимых источника находятся в бесконечности, но угол сходимости (в данном случае это угловой размер между источниками) конечен и равен  $2\gamma$ .

А теперь рассмотрим пример оптического опыта, в котором эквивалентная интерференционная схема включает в себя два когерентных источника, один из которых действительный, а другой мнимый.

**Задача 3.** В интерференционном опыте, изображенном на рисунке 5, используется квазимонохроматический точечный

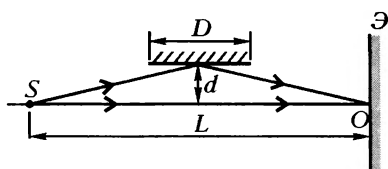


Рис. 5

источник света  $S$ . Найдите ширину интерференционных полос на экране Э, а также максимальный и минимальный порядки наблюдаемых полос. Параметры установки:  $L = 1 \text{ м}$ ,  $D = 10 \text{ см}$ ,  $d = 0,5 \text{ см}$ , отражающее зер-

кало расположено посередине между источником и экраном, длина волны света  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$ .

Указание: при малых  $x$  ( $x \ll 1$ ) можно считать, что  $(1+x)^N \approx 1+Nx$ .

Для данного опыта эквивалентная интерференционная схема изображена на рисунке 6. Двумя когерентными источниками являются наш действительный источник света  $S$  и его мнимое изображение  $S'$  в плоском зеркале. Область взаимного пересе-

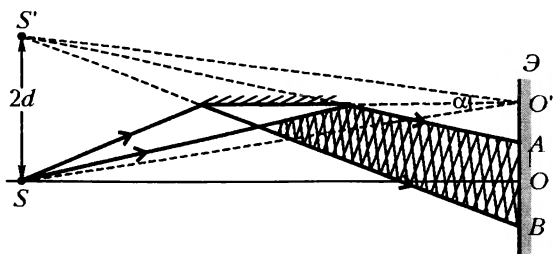


Рис. 6

чения сферических волн от этих источников заштрихована. Поскольку расстояние от зеркала до оси  $SO$  мало ( $d \ll L$ ), можно считать, что угол сходимости интерферирующих лучей равен

$$\alpha = \frac{2d}{L},$$

а ширина интерференционных полос равна

$$\delta = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda L}{2d} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ см.}$$

Как видно из рисунка 6, точка  $O'$  соответствует нулевому порядку интерференции (разность хода приходящих в эту точку волн равна нулю), но в нашей схеме в этом месте экрана интерференционной картины нет, она начинается ниже — в точке  $A$ , а заканчивается в точке  $B$ . Очевидно, что в точке  $A$  мы будем иметь минимальный порядок интерференции, а в точке  $B$  — максимальный. Найдем эти порядки.

Оптический путь  $S'A$  равен (приблизительно)

$$S'A \approx L \left( 1 + \frac{2d^2}{(L + D)^2} \right),$$

а оптический путь  $SA$  составляет

$$SA \approx L \left( 1 + \frac{2d^2 D^2}{(L + D)^2 L^2} \right).$$

Получить эти выражения из простых геометрических соображений мы предоставляем читателю.

Интерференционный порядок для точки  $A$  находится из условия

$$S'A - SA = m_A \lambda.$$



Отсюда

$$m_A \approx \frac{2d^2(L-D)}{\lambda L(L+D)} \approx 80.$$

Аналогично, для точки  $B$  оптический путь  $S'B$  равен (приблизительно)

$$S'B \approx L \left( 1 + \frac{2d^2}{(L-D)^2} \right),$$

а оптический путь  $SB$  составляет

$$SB \approx L \left( 1 + \frac{2d^2 D^2}{(L-D)^2 L^2} \right).$$

Тогда интерференционный порядок для точки  $B$  равен

$$m_B \approx \frac{2d^2(L+D)}{\lambda L(L-D)} \approx 122.$$

**Задача 4.** На плоскопараллельную прозрачную пластинку толщиной  $d$  с показателем преломления материала  $n$  под углом  $\alpha$  падает параллельный пучок квазимонохроматического света с длиной волны  $\lambda$  (рис.7). Определите оптическую разность хода  $\Delta$  между двумя когерентными волнами, отраженными от верхней и нижней поверхностей пластинки.

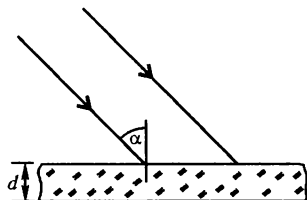


Рис. 7

Когда мы говорим о параллельном пучке света, то подразумеваем плоскую электромагнитную волну, у которой поверхность постоянной фазы, т.е. волновой фронт, это плоскость, перпендикулярная на-

правлению распространения светового пучка. Волновой фронт в падающей волне на рисунке 8 обозначен прямой  $AB$ , которая

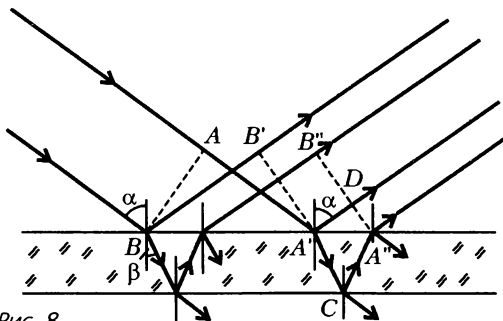


Рис. 8

принадлежит этому фронту. Часть пучка (волны) отражается от передней поверхности пластинки — волновой фронт этой волны  $A'B'$ . Другая часть пучка преломляется и распространяется в пластинке, а затем частично отражается от ее задней поверхности. Эта отраженная волна возвращается к передней поверхности пластинки, преломляется и выходит в том же направлении, что и волна, отраженная от передней поверхности. Волновой фронт волны, отраженной от задней поверхности пластинки, обозначим  $A''B''$ . В точке  $A'$  обе отраженные волны находятся в фазе, в этой точке падающая волна раздваивается на две волны. Если мы расположим экран вдоль прямой  $A''B''$ , то волна, отраженная от передней поверхности, пройдет до экрана оптический путь  $A'D$ , а отраженная от задней поверхности — оптический путь  $A'CA''$ . Вычислим эти пути.

Из треугольника  $A'CA''$  найдем

$$A'C = CA'' = \frac{d}{\cos \beta}, \quad A'A'' = 2d \operatorname{tg} \beta,$$

откуда получим оптический путь  $A'CA''$ :

$$A'CA'' = \frac{2dn}{\cos \beta}.$$

Теперь из треугольника  $A'DA''$  найдем оптический путь  $A'D$ :

$$A'D = A'A'' \sin \alpha = 2d \operatorname{tg} \beta \sin \alpha.$$

Используя соотношение между углами падения и преломления:

$$\sin \alpha = n \sin \beta,$$

можно записать

$$A'CA'' = \frac{2dn^2}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}, \quad \text{и} \quad A'D = \frac{2d \sin^2 \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

Таким образом, разность хода между двумя последовательными волнами, отраженными от передней и задней поверхностей пластинки, равна

$$A'CA'' - A'D = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}.$$

К полученной разности хода необходимо добавить поправку, которая вызвана различием в условиях отражения электромагнитной волны на границах воздух — вещество (верхняя поверхность пластинки) и вещество — воздух (нижняя граница). Не

вдаваясь в подробности, укажем, что эта дополнительная разность хода равна  $\lambda/2$ . Поэтому окончательно

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} + \frac{\lambda}{2}.$$

**Задача 5.** В интерференционной схеме параллельный пучок квазимонохроматического света с длиной волны  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$  падает под углом  $\alpha = 60^\circ$  на систему из двух плоскопараллельных полупрозрачных зеркал 1 и 2 (рис.9). Часть светового пучка отражается от зеркала 1, оставшаяся часть, пройдя зеркало 1, частично отражается от зеркала 2 и, снова пройдя зеркало 1, вместе с пучком, отраженным от зеркала 1, с помощью собирающей линзы Л фокусируется на приемник П, сигнал которого пропорционален интенсивности падающего на него света. Какова будет частота переменного сигнала, регистрируемого приемником, в случае равномерного движения второго зеркала (относительно первого) со скоростью  $v = 0,01 \text{ см/с}$ ?

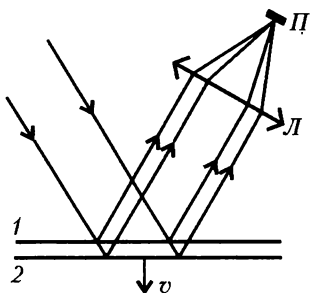


Рис. 9

Воспользуемся результатом, полученным при решении предыдущей задачи. Пусть в некоторый произвольный момент времени расстояние между зеркалами равно  $x$ , тогда разность хода между пучками света, отраженными от зеркал, составляет

$$\Delta = 2x\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 2x \cos \alpha.$$

В данном случае поправки на  $\lambda/2$  нет, поскольку отражения от обоих зеркал одинаковые.

Сделаем небольшое пояснение по поводу действия линзы. В фокальной плоскости линзы от каждого параллельного пучка получается световое пятнышко, появление которого обусловлено дифракцией световых пучков на линзе. Размер этого пятна пропорционален длине волны света  $\lambda$  и обратно пропорционален поперечному размеру пучка. Но самое главное свойство линзы состоит в том, что она сохраняет разность хода между нашими двумя пучками света, которые собираются в ее фокальной плоскости.

Пусть в некоторый момент времени расстояние между зеркалами равно  $x_1$ , при этом разность хода  $\Delta(x_1)$  кратна целому

числу длин волн, например с коэффициентом  $m$ :

$$2x_1 \cos \alpha = m\lambda.$$

В этом случае на приемнике будет максимальная освещенность света. Если через минимальное время  $T$  освещенность света на приемнике снова будет максимальной, то можно записать

$$2(x_1 + vT) \cos \alpha = (m + 1)\lambda.$$

Вычитая из последнего равенства предпоследнее, получим

$$2vT \cos \alpha = \lambda.$$

Отсюда найдем частоту переменного сигнала, регистрируемого приемником:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{2v \cos \alpha}{\lambda} = 200 \text{ Гц}.$$

В разобранным опыте мы не наблюдаем интерференционную картину как таковую: поверхность приемника имеет равномерную освещенность, которая зависит от расстояния между зеркалами. Это связано с тем, что у нас задан пучок света только с одним фиксированным углом падения. При наличии световых пучков с другими углами падения в фокальной плоскости линзы наблюдалась бы типичная интерференционная картина в виде полос. Такие интерференционные полосы называют полосами равного наклона. При изменении расстояния между зеркалами будет происходить смещение всей интерференционной картины вдоль экрана.

**Задача 6.** Интерференционные полосы, возникающие на поверхности тонкого стеклянного клина с показателем преломления  $n = 1,5$  при освещении рассеянным квазимонохроматическим светом с длиной волны  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ , проецируются собирающей линзой на экран (рис.10). Главная оптическая ось линзы перпендикулярна поверхности клина, расстояние от линзы до клина  $a = 10 \text{ см}$ , а от линзы до экрана  $b = 100 \text{ см}$ . Ширина интерференционных полос, наблюдаемых на экране,  $\delta = 2 \text{ мм}$ . Определите угол клина  $\varphi$ .

На поверхность клина падает рассеянный свет, т.е. угол падения

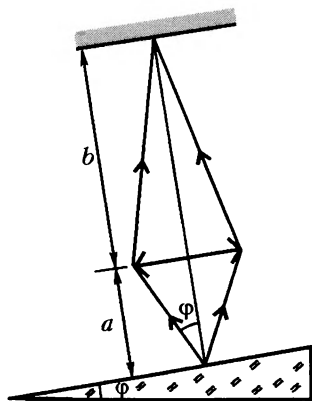


Рис. 10

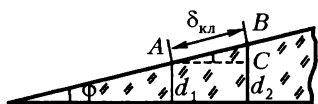
изменяется в интервале  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ , но в интерференции будут участвовать только те лучи света, угол падения которых находится в пределах  $0 \leq \alpha \leq \varphi$ . Если мы посмотрим на выражение для разности хода  $\Delta$ , полученное в задаче 4, то увидим, что разность хода зависит как от толщины слоя  $d$ , так и от угла падения  $\alpha$ . Данная интерференционная схема основана на зависимости  $\Delta$  от  $d$ , а неизбежное наличие разброса угла падения приводит к размытию интерференционных полос. Поэтому в нашей схеме для наблюдения четкой интерференционной картины желательно задиафрагмировать линзу и уменьшить разброс угла падения до разумного предела. Мы будем предполагать, что это условие выполнено и угол падения  $\alpha \approx 0$ .

Найдем сначала ширину интерференционных полос на поверхности клина. Пусть толщина клина  $d_1$  соответствует светлой полосе  $m$ -го порядка, тогда

$$2d_1n + \frac{\lambda}{2} = m\lambda,$$

где  $m$  – целое число. А светлой полосе  $(m+1)$ -го порядка пусть соответствует толщина  $d_2$ :

$$2d_2n + \frac{\lambda}{2} = (m+1)\lambda.$$



Вычитая почленно одно равенство из другого, получим

$$2(d_2 - d_1)n = \lambda.$$

Рис. 11

Теперь из треугольника  $ABC$  (рис.11) найдем ширину полос  $\delta_{кл}$  на поверхности клина:

$$\delta_{кл} = \frac{d_2 - d_1}{\sin \varphi} \approx \frac{d_2 - d_1}{\varphi}.$$

Но ширина полос на экране  $\delta$  связана с шириной полос на клине  $\delta_{кл}$  через увеличение линзы простым соотношением:

$$\delta = \frac{b}{a} \delta_{кл}.$$

Тогда

$$\frac{a}{b} \delta = \delta_{кл} \approx \frac{d_2 - d_1}{\varphi} \approx \frac{\lambda}{2n\varphi}.$$

Отсюда находим искомый угол клина:

$$\varphi \approx \frac{b\lambda}{2an\delta} = 0,83 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

**Задача 7.** Свет с длиной волны  $\lambda$  от двух точечных некогерентных квазимонохроматических источников  $S_1$  и  $S_2$  падает на непрозрачный экран  $\mathcal{E}_1$  с двумя отверстиями, расстояние между которыми  $d$  (рис. 12). Интерференция света, прошедшего через отверстия, наблюдается на экране  $\mathcal{E}_2$

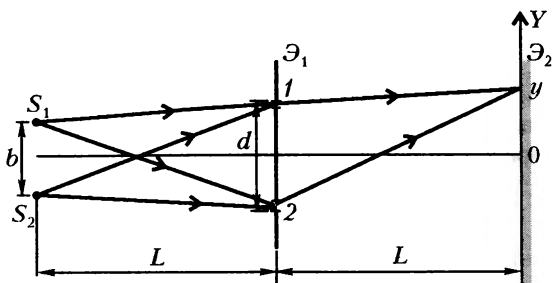


Рис. 12

вблизи точки 0, лежащей на оси системы. Источники и точка наблюдения находятся на одном и том же расстоянии  $L$  от экрана  $\mathcal{E}_1$ . При симметричном удалении источников от оси интерференционная картина периодически возникает и исчезает. Определите расстояния  $b_N$ , при которых интерференционная картина исчезает.

Найдем распределение интенсивности света на экране  $\mathcal{E}_2$  в зависимости от расстояния  $b$  между источниками. Запишем интенсивность света от каждого источника в точке с координатой  $y$ . Рассмотрим источник  $S_1$ . Оптическая разность хода между лучами  $S_1 2y$  и  $S_1 1y$  равна

$$\Delta_1 = \frac{db}{2L} + \frac{dy}{L}.$$

Воспользовавшись решением задачи 1, найдем

$$I_1(b, y) = E_0^2 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{db}{2L} + \frac{dy}{L} \right) \right) \right).$$

Для источника  $S_2$  оптическая разность хода между лучами  $S_2 2y$  и  $S_2 1y$  равна

$$\Delta_2 = \frac{dy}{L} - \frac{db}{2L},$$

и интенсивность света от источника  $S_2$  составляет

$$I_2(b, y) = E_0^2 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{dy}{L} - \frac{db}{2L} \right) \right) \right).$$

Поскольку источники  $S_1$  и  $S_2$  некогерентны, результирующая интенсивность будет равна сумме их интенсивностей:

$$\begin{aligned}
 I(b, y) &= I_1(b, y) + I_2(b, y) = \\
 &= 2E_0^2 + E_0^2 \left( \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{dy}{L} + \frac{db}{2L} \right) \right) + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{dy}{L} - \frac{db}{2L} \right) \right) \right) = \\
 &= 2E_0^2 \left( 1 + \cos \frac{\pi db}{\lambda L} \cos \frac{2\pi dy}{\lambda L} \right).
 \end{aligned}$$

Как видно из полученного выражения, амплитуда  $A$  переменной составляющей в распределении освещенности на экране  $\mathcal{E}_2$  зависит от расстояния  $b$  между источниками по закону

$$A(b) = \cos \frac{\pi db}{\lambda L}.$$

Интерференционная картина исчезает, когда амплитуда  $A(b)$  становится равной нулю:

$$\cos \frac{\pi db}{\lambda L} = 0.$$

Соответствующие расстояния  $b_N$  между источниками определяются из соотношения

$$\frac{\pi db_N}{\lambda L} = \frac{\pi}{2} + \pi N, \text{ где } N = 0, 1, 2, \dots, \text{ откуда } b_N = \frac{(2N + 1)\lambda L}{2d}.$$

### Упражнения

1. Точечный квазимонохроматический источник света с длиной волны  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$  расположен на расстоянии  $a = 60 \text{ см}$  от линзы с фокусным расстоянием  $F = 20 \text{ см}$ . Линза разрезана по диаметру, и ее половинки раздвинуты на расстояние  $l = 2 \text{ мм}$ . Чему будет равна ширина интерференционных полос, наблюдаемых на экране, установленном на расстоянии  $L = 3,3 \text{ м}$  от линзы? Зазор между половинками линзы перекрыт экраном.

2. Выразите расстояние  $x$  от центра интерференционной картины до  $m$ -й светлой полосы в опыте с бипризмой. Показатель преломления материала призмы  $n$ , преломляющий угол  $\alpha$ , длина волны света  $\lambda$ . Расстояние от точечного источника до призмы  $a$ , от призмы до экрана  $b$ . Преломляющий угол  $\alpha$  мал.

3. С помощью зрительной трубы, установленной на бесконечность, наблюдают интерференционные полосы равного наклона в тонкой плоскопараллельной стеклянной пластинке толщиной  $h = 0,2 \text{ мм}$  с показателем преломления  $n = 1,41$  при угле наблюдения  $\alpha = 60^\circ$ . Найдите порядок  $m$  центральной интерференционной полосы (по центру фокальной плоскости окуляра). Длина волны света  $\lambda = 560 \text{ нм}$ .

## Иррациональные уравнения

1. а)  $\emptyset$ ; б)  $-2$ ; в)  $4 + 2\sqrt{7}$ ; г)  $\emptyset$ ; д)  $3$ ; е)  $-1/2$ ;  $3/2$ ; ж)  $-1$ ; з)  $1/2$ .

2. а)  $99/49$ ; б)  $3$ ; в)  $(5 \pm 2\sqrt{2})/2$ ; г)  $1 \pm \sqrt{3}$ . *Указание.* Сделайте замену  $u = \sqrt{2x^2 - 4x + 12}$ ; д)  $12$ ; е)  $(-1 \pm \sqrt{17})/2$ ; ж)  $-1/\sqrt{2}$ ;  $(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$ . *Указание.* Возведите в квадрат, а затем выполните замену  $t = 2x\sqrt{1-x^2}$ ; з)  $(1 + \sqrt{37})/2$ .

3. а)  $11 - a + 4\sqrt{7-2a}$  при  $a < 1,5$ ;  $11 - a \pm 4\sqrt{7-2a}$  при  $1,5 \leq a \leq 3,5$ ;  $\emptyset$  при  $a > 3,5$ ; б)  $\emptyset$  при  $a < (1 + \sqrt{17})/4$ ;  $(17 + \sqrt{17})/4$  при  $a = (1 + \sqrt{17})/4$ ;  $3a^2 - a - 1 \pm 2a\sqrt{2a^2 - a - 2}$  при  $(1 + \sqrt{17})/4 < a \leq 2$ ;  $3a^2 - a - 1 + 2a\sqrt{2a^2 - a - 2}$  при  $a > 2$ ; в)  $12 - 2a + 4\sqrt{8-3a}$  при  $a < 4/3$ ;  $12 - 2a \pm 4\sqrt{8-3a}$  при  $4/3 \leq a < 8/3$ ;  $20/3$  при  $a = 8/3$ ;  $\emptyset$  при  $a > 8/3$ ; г)  $\emptyset$  при  $a < -3/8$  и  $0 < a < 3/8$ ;  $12a^2 - 2a + 4a\sqrt{8a^2 - 3a}$  при  $-3/8 \leq a \leq 0$  и  $a > 4/3$ ;  $12a^2 - 2a \pm 4a\sqrt{8a^2 - 3a}$  при  $3/8 < a \leq 4/3$ ;  $15/16$  при  $a = 3/8$ .

4. а)  $-3/4$ ; б)  $3/4$ ; в)  $(7 - \sqrt{13})/6$ ; г)  $(5 - 3\sqrt{5})/15$ ; д)  $5$ ; е)  $5$ .

5. а)  $3$ ; б)  $1$ ; в)  $1$ ; г)  $(3 + \sqrt{13})/2$ . *Указание.* При  $x \geq 0$  уравнение равносильно такому:  $x = \sqrt{3\sqrt{3x+1}+1}$ , а при  $x < 0$  корней нет.

6. а)  $2$ ; б)  $2$ . 7. а)  $-1$ ; б)  $2$ .

## Иррациональные неравенства

1.  $(-\infty; 1)$ . 2.  $\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$ .

3.  $\left[-1; \frac{-5 - 2\sqrt{2}}{8}\right) \cup \left(\frac{-5 + 2\sqrt{2}}{8}; +\infty\right)$ . 4.  $(-\infty; -3] \cup \left(\frac{15}{4}; +\infty\right)$ .



$$5. \left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{3}\right] \cup [0; 1]. \quad 6. (-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty).$$

$$7. (-\infty; -\sqrt[3]{2}) \cup (\sqrt[3]{2}; +\infty). \quad 8. \left(-1; \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right) \cup (2; +\infty).$$

$$9. \left(\frac{-3-\sqrt{7}}{2}; 0\right]. \quad 10. \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}; 2\right]. \quad 11. (1; 2].$$

$$12. \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}; 2\right]. \quad 13. \left(1; \frac{2}{\sqrt{3}}\right). \quad 14. [-6; 0) \cup (3; 4].$$

$$15. \left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}; 1\right]. \quad 16. (-2; -1] \cup \left[-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

$$17. [-5; -1] \cup [0; 5]. \quad 18. \{5\}.$$

$$19. \left[-7; -6 + 2\sqrt{\sqrt{5}-2}\right). \quad \text{Указание. Выполните замену}$$

$$t = \sqrt{x+7} - \sqrt{-x-5}.$$

$$20. \left(1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right). \quad 21. [1; 2). \quad 22. \left(0; \frac{1}{2}\right). \quad 23. \emptyset.$$

$$24. (-\infty; -1). \quad \text{Указание. Приведите неравенство к виду}$$

$$-\frac{2(x+1)}{\sqrt{3x^2-1} + \sqrt{3x^2+2x+1}} > \frac{3(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+4} + \sqrt{x^2-x+1}}.$$

$$26. (1; +\infty). \quad 27. [1; +\infty). \quad 28. \left[\frac{2}{3}; 6\right). \quad 29. \left(\frac{1+\sqrt{7}}{4}; 1\right].$$

$$30. (0; 2). \quad \text{Указание. При } 0 < x < 2 \text{ справедливы неравенства}$$

$$\sqrt[4]{x^4+66} > \sqrt{x^2+5} > x+1.$$

$$31. (-2; -1] \cup \left[-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right). \quad \text{Указание. После замены } t = 3x^2 + 5x + 2$$

приходим к неравенству  $\sqrt{t+5} - \sqrt{t} > 1$ , причем функция в левой части – убывающая. Отсюда следует, что  $0 \leq t < 4$ .

$$32. \emptyset. \quad 33. 1. \quad 34. (-\infty; -1] \cup [1; +\infty). \quad 35. [1; 2).$$

$$36. (-\infty; -2) \cup (2; +\infty). \quad 37. (3; +\infty).$$

$$38. \left(0; \frac{1}{4}\right). \quad \text{Указание. Воспользуйтесь возрастанием функции}$$

$$y = \sqrt{x} \cdot 4^{\sqrt{x}}.$$

$$39. \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right].$$

### Монотонные функции в конкурсных задачах

$$1. \text{ а) } 1; \text{ б) } -1; \text{ в) } 2; \text{ г) } 10.$$

$$2. \text{ а) } 3; \text{ б) } 2; \text{ в) } 4.$$

3. а) Возрастает. *Указание.* Если  $x_1 > x_2 > 1$ , то

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) - \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 x_2 - 1)}{x_1 x_2} > 0.$$

б) Убывает. *Указание.*  $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ .

в) Убывает. *Указание.*  $2^x - 3^x = 3^x \left( \left(\frac{2}{3}\right)^x - 1 \right)$ . Первый множитель возрастает при  $x > 0$ , а второй убывает и отрицателен.

г) Возрастает. д) Убывает. *Указание.*  $\log_3 x - \log_2 x = \log_2 x (\log_3 2 - 1)$ . е) Убывает. ж) Возрастает при  $x > 0$ .

5. а) Возрастает при  $x < -1$ , убывает при  $x > 1$ . б) Убывает при  $x < -1$  и при  $x > 1$ . в) Возрастает при  $x \in \mathbf{R}$ .

6. а) 2; б)  $\sqrt{3}/2$ ; в) 3; г)  $x \geq 2$ ; д)  $x \geq 1$ ; е)  $0 < x < 1$ .

7. а) 1; б) 1; в) 4; г) 1; д)  $-1 \leq x < \sqrt{2}/2$ .

8. а)  $-1/5$ . *Указание.* Приведите уравнение к виду  $f(u) = f(v)$ , где  $f(t) = t(2 + \sqrt{t^2 + 3})$ ,  $u = 2x + 1$ ,  $v = -3x$ . Докажите, что функция  $y = f(t)$  — возрастающая. б)  $1/3$ .

9. а)  $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right); \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ . *Указание.* Функция  $x + \sin x$  — возрастающая. б)  $(0; 0); \left(\sqrt[7]{\frac{2}{3}}; \sqrt[7]{\frac{32}{243}}\right)$ . *Указание.* Перепишите первое уравнение в виде  $x^5 + x = t^5 + t$ , где  $t = \sqrt[5]{y}$ .

в) (2; 4). *Указание.* Из первого уравнения следует, что  $x = \log_2 y$ .

10.  $1/2$ ; 1;  $3/2$ . *Указание.* Запишите уравнение в виде  $2^t \log_3(t+2) = 2^u(u+2)$ , где  $t = (x-1)^2$ ,  $u = 2|x-a|$ . Из монотонности функции  $2^t \log_3(t+2)$  при  $t \geq 0$  следует, что  $t = u$ . Осталось выяснить, при каких  $a$  уравнение  $(x-1)^2 = 2|x-a|$  имеет ровно 3 корня.

11. 2. *Указание.* При  $0 < a < 1$  неравенство приводится к виду  $\log_3(u+1) \log_5(u^2+1) \geq 1$ , где  $u = \sqrt{x^2 + ax + 5}$ , имеющему бесконечное число решений при любом  $a$ . При  $a > 1$  имеем  $\log_3(u+1) \log_5(u^2+1) \leq 1$ , откуда  $u \leq 2$ . Неравенство же  $\sqrt{x^2 + ax + 5} \leq 2$  имеет единственное решение лишь при  $a = 2$ .

13. а)  $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left[2 - \sqrt{5}; \frac{1}{2}\right) \cup [2 + \sqrt{5}; +\infty)$ ; б)  $[1; 2) \cup (2 + \sqrt{5}; 6]$ ; в)  $(-\infty; -11) \cup (3; +\infty)$ ; г)  $(-\infty; -1) \cup [4; 6) \cup [8; +\infty)$ ; д)  $(2; 3) \cup [4; +\infty)$ ; е)  $\left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$ ; ж)  $(-3; 7)$ ,  $x \neq 2 - 2\sqrt{6}$ ,  $-2$ ,  $2 + 2\sqrt{6}$ .

## О модуле квадратного трехчлена

1.  $-\frac{8M}{(n-m)^2} \leq a \leq \frac{8M}{(n-m)^2}$ .    2.  $\{(-1; -2), (0; 1)\}, [0; 2]$ .

3.  $a = -\frac{1}{2}(m+n), b = \frac{1}{4}(m-n)$ .

5.  $7/16$ .    6. Да.    8. 8.    9.  $2\sqrt{2M}$ .

10. Если

$$(m-n)^2 \leq M_2 - M_1,$$

то

$$p \in \left[ -(m+n) - \frac{M_2 - M_1}{n-m}; -(m+n) + \frac{M_2 - M_1}{n-m} \right];$$

если

$$M_2 - M_1 < (m-n)^2 \leq 4(M_2 - M_1),$$

то

$$p \in \left[ -2\left(m + \sqrt{M_2 - M_1}\right); 2\left(\sqrt{M_2 - M_1} - n\right) \right];$$

если  $4(M_2 - M_1) < (n-m)^2$ , то искомым значений параметра не существует.

## Четвертый признак равенства треугольников

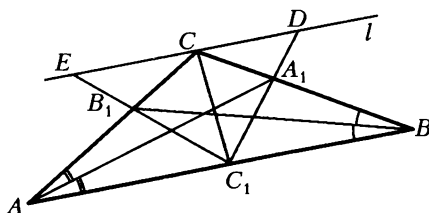
1. а) Из второго способа решения следует, что  $\sin \angle C = \sin \angle C'$ , но при тупом или прямом угле  $A$  угол  $C$  острый.

б) Если  $BC > AB$ , то  $\angle A > \angle C$  и угол  $C$  острый.

2. Указание. Пусть  $K$  — середина отрезка  $OI$ . Докажите, что  $\angle BKC = 180^\circ - \alpha$ .

3. Либо  $AC = BC$ , либо  $\angle C = 60^\circ$ .    4. 24.    5. 4.

6. Указание (см. рисунок). Пусть  $CD = u$ ,  $EC = v$ . Из подобия треугольников  $CDA_1$  и  $A_1BC_1$  и свойств биссектрисы следует, что



$\frac{u}{BC_1} = \frac{A_1C}{A_1B} = \frac{b}{c}$ . Аналогично,  $\frac{v}{AC_1} = \frac{a}{c}$ . Разделив одну пропорцию на другую, имеем

$$\frac{u}{v} = \frac{b}{a} \cdot \frac{BC_1}{AC_1} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1.$$

7.  $120^\circ$ .

### Об одном случае расположения сферы и пирамиды

1. 2. 2. 12. 3.  $16; \frac{72}{7}; 3\sqrt{\frac{5}{2}}; \pi - \arccos \frac{127}{145}$ .

### О динамике криволинейного движения

1.  $v_0 = \sqrt{g(2H + 3R)} \approx 13 \text{ м/с}$ ;  $s = \sqrt{2(H + R)R + H^2} \approx 12 \text{ м}$ .

2. Сила тяги равна  $F = mg \frac{R^2}{(R + h)^2} \sin \varphi \approx 0,02mg = 200 \text{ Н}$  и перпендикулярна плоскости движения спутника.

3.  $T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{v^2}{L}$ . 4.  $T_{\max} = \frac{mg}{80}$ . 5.  $v_2 = \sqrt{2gR} = 4 \text{ м/с}$ .

6. Сумма сил равна  $F = \frac{mv^2 \cos^2 \alpha}{R}$  и направлена по горизонтали к оси винтовой линии.

### Несколько задач на закон сохранения механической энергии

1.  $n = 5$ . 2.  $\delta = 25\%$ . 3.  $s = 80 \text{ см}$ . 4.  $u = 5 \text{ м/с}$ .  
5.  $F = 320 \text{ Н}$ . 6.  $v_{\max} = 4 \text{ м/с}$ . 7.  $T = 5 \text{ Н}$ .

### Центр масс механической системы

1.  $v_{4m} = \frac{2}{5} v_0$ ;  $\tau = \pi \sqrt{\frac{4m}{5k}}$ . 2.  $H = \frac{36}{5} s = 18 \text{ см}$ .

4.  $E_k = 1,3 \text{ МэВ}$ .

### Работа газа при переходе из начального состояния в конечное

1.  $A_{23} = 2A$ . 2. 1)  $T_1 = \frac{8}{9} \frac{Q}{vR}$ ; 2)  $A = \frac{Q}{6}$ .  
3.  $Q = A + \frac{3}{2} vR\Delta T$ .

## Теплоемкость равновесных тепловых процессов

1.  $C = C_p - \frac{\alpha R V}{\beta + 2\alpha V}$ , где  $C_p$  – молярная теплоемкость при постоянном давлении.

2. Газ охлаждается;  $C = C_V - R$ , где  $C_V$  – молярная теплоемкость при постоянном объеме.

3.  $C = \nu(3C_V - 2C_p) = -0,677$  Дж/К, где  $\nu = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = 0,163$  моль – количество молей гелия,  $C_V = \frac{3}{2}R$  и  $C_p = \frac{5}{2}R$ .

4.  $A_{12} = \frac{3}{2}A$ .

## Диэлектрики в электрическом поле

1.  $E = \frac{\epsilon}{d + \epsilon(d - h)} = 2,6 \cdot 10^3$  В/м.

2.  $\sigma = \frac{\epsilon_0(\epsilon - 1)\epsilon}{d}$ .      3.  $x = \frac{d}{\frac{\epsilon_0 \epsilon^2 S \epsilon^2}{2Ad} - \epsilon}$ .

4.  $F = \frac{\epsilon_0 S}{2} \left( \frac{\epsilon U}{l_1 + \epsilon l_2} \right)^2$ ; при  $l_2 \rightarrow \infty$   $F = \frac{\epsilon_0 \epsilon^2 S U^2}{2l_1^2}$ .

## Закон электромагнитной индукции

1.  $q = \frac{\pi d^2 B N}{4R} = 5 \cdot 10^{-3}$  Кл.      2.  $I = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1 + k l^2 / 16}{R} = 0,5$  А.

3.  $P = \frac{\pi k^2 l^4}{16(\pi + 1)^3 R}$ .      4.  $Q = \left( \frac{\epsilon - Bvl}{R + r} \right)^2 R t = 64$  Дж.

5.  $v = 3$  м/с.      6.  $\epsilon = \frac{\sqrt{2WL}}{t} = 14,1$  В.

7.  $P = \left( \frac{Bvd}{R + \rho d/S} \right)^2 R$ .      8.  $\Delta\phi = \frac{\omega l^2 B}{2} = 0,3$  В.

## Энергетический метод исследования колебаний

1.  $\omega = \sqrt{\frac{m}{m + M} \frac{g}{R}} = 2$  с<sup>-1</sup>.

2.  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = 2$  с<sup>-1</sup>.      3.  $\omega = \sqrt{\frac{2g}{l} + \frac{k}{4m}} = 8$  с<sup>-1</sup>.

4.  $\omega = \sqrt{\frac{2g}{R} - \frac{2k\lambda Q}{3mR^2}} = 10 \text{ с}^{-1}$  (здесь  $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$  – электрическая постоянная).

5.  $t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g \sin \alpha}} = 471 \text{ мс.}$

### Интерференция света

1.  $\delta = \frac{\lambda(aL - F(a + L))}{al} = 0,5 \text{ мм.}$       2.  $x = \frac{(a + b)m\lambda}{2a(n - 1)\alpha}.$

3.  $m = \frac{2h\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{\lambda} + \frac{1}{2} = 795.$

Приложение к журналу «Квант» №1/2009

## В помощь абитуриентам

*Составители В.И.Голубев, А.А.Егоров,  
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан*

*Редакторы А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова*

*Обложка А.Е.Пацхверия*

*Макет и компьютерная верстка Е.В.Морозова*

*Компьютерная группа Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева*

ИБ № 97

Формат 84×108 1/32. Бум. офсетная. Гарнитура кудряшевская

Печать офсетная. Объем 6,5 печ.л. Тираж 3000 экз.

Заказ № 64.

119296 Москва, Ленинский пр., 64-А, «Квант»

Тел.: (495)930-56-48, e-mail: admin@kvant.info

Отпечатано в ОАО Ордена Трудового Красного Знамени

«Чеховский полиграфический комбинат»

142300 г.Чехов Московской области

Сайт: www.chpk.ru. E-mail: marketing@chpk.ru

Факс: 8(49672)6-25-36, факс: 8(499)270-73-00

многоканальный: 8(499) 270-73-59

**ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ КНИГИ  
СЕРИИ «БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»**

1. *М.П.Бронштейн*. Атомы и электроны
2. *М.Фарадей*. История свечи
3. *О.Оре*. Приглашение в теорию чисел
4. Опыты в домашней лаборатории
5. *И.Ш.Слободецкий, Л.Г.Асламазов*. Задачи по физике
6. *Л.П.Мочалов*. Головоломки
7. *П.С.Александров*. Введение в теорию групп
8. *В.Г.Штейнгауз*. Математический калейдоскоп
9. Замечательные ученые
10. *В.М.Глушков, В.Я.Валах*. Что такое ОГАС?
11. *Г.И.Копылов*. Всего лишь кинематика
12. *Я.А.Сморodinский*. Температура
13. *А.Е.Карпов, Е.Я.Гук*. Шахматный калейдоскоп
14. *С.Г.Гиндикин*. Рассказы о физиках и математиках
15. *А.А.Боровой*. Как регистрируют частицы
16. *М.И.Каганов, В.М.Цукерник*. Природа магнетизма
17. *И.Ф.Шарыгин*. Задачи по геометрии: планиметрия
18. *Л.В.Тарасов, А.Н.Тарасова*. Беседы о преломлении света
19. *А.Л.Эфрос*. Физика и геометрия беспорядка
20. *С.А.Пикин, Л.М.Блинов*. Жидкие кристаллы
21. *В.Г.Болтянский, В.А.Ефремович*. Наглядная топология
22. *М.И.Башмаков, Б.М.Беккер, В.М.Гольховой*. Задачи по математике: алгебра и анализ
23. *А.Н.Колмогоров, И.Г.Журбенко, А.В.Прохоров*. Введение в теорию вероятностей
24. *Е.Я.Гук*. Шахматы и математика
25. *М.Д.Франк-Каменецкий*. Самая главная молекула
26. *В.С.Эдельман*. Вблизи абсолютного нуля
27. *С.Р.Филонович*. Самая большая скорость
28. *Б.С.Бокштейн*. Атомы блуждают по кристаллу
29. *А.В.Бялко*. Наша планета – Земля
30. *М.Н.Аршинов, Л.Е.Садовский*. Коды и математика
31. *И.Ф.Шарыгин*. Задачи по геометрии: стереометрия
32. *В.А.Займовский, Т.Л.Колупаева*. Необычные свойства обычных металлов
33. *М.Е.Левинштейн, Г.С.Симин*. Знакомство с полупроводниками
34. *В.Н.Дубровский, Я.А.Сморodinский, Е.Л.Сурков*. Релятивистский мир
35. *А.А.Михайлов*. Земля и ее вращение
36. *А.П.Пурмаль, Е.М.Слободецкая, С.О.Травин*. Как превращаются вещества

37. Г.С.Воронов. Штурм термоядерной крепости
38. А.Д.Чернин. Звезды и физика
39. В.Б.Брагинский, А.Г.Полнарев. Удивительная гравитация
40. С.С.Хилькевич. Физика вокруг нас
41. Г.А.Звенигородский. Первые уроки программирования
42. Л.В.Тарасов. Лазеры: действительность и надежды
43. О.Ф.Кабардин, В.А.Орлов. Международные физические олимпиады школьников
44. Л.Е.Садовский, А.Л.Садовский. Математика и спорт
45. Л.Б.Окунь.  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ... Z: элементарное введение в физику элементарных частиц
46. Я.Е.Гегузин. Пузыри
47. Л.С.Марочник. Свидание с кометой
48. А.Т.Филиппов. Многоликий солитон
49. К.Ю.Богданов. Физик в гостях у биолога
50. Занимательно о физике и математике
51. Х.Рачлис. Физика в ванне
52. В.М.Липунов. В мире двойных звезд
53. И.К.Кикоин. Рассказы о физике и физиках
54. Л.С.Понтрягин. Обобщения чисел
55. И.Д.Данилов. Секреты программируемого микрокалькулятора
56. В.М.Тихомиров. Рассказы о максимумах и минимумах
57. А.А.Силин. Трение и мы
58. Л.А.Ашкинази. Вакуум для науки и техники
59. А.Д.Чернин. Физика времени
60. Задачи московских физических олимпиад
61. М.Б.Балк, В.Г.Болтянский. Геометрия масс
62. Р.Фейнман. Характер физических законов
63. Л.Г.Асламазов, А.А.Варламов. Удивительная физика
64. А.Н.Колмогоров. Математика – наука и профессия
65. М.Е.Левинштейн, Г.С.Симин. Барьеры: от кристалла до интегральной схемы
66. Р.Фейнман. КЭД – странная теория света и вещества
67. Я.Б.Зельдович, М.Ю.Хлопов. Драма идей в познании природы
68. И.Д.Новиков. Как взорвалась Вселенная
69. М.Б.Беркинблит, Е.Г.Глаголева. Электричество в живых организмах
70. А.Л.Стасенко. Физика полета
71. А.С.Штейнберг. Репортаж из мира сплавов
72. В.Р.Полищук. Как исследуют вещества
73. Л.Кэрролл. Логическая игра
74. А.Ю.Гроссберг, А.Р.Хохлов. Физика в мире полимеров
75. А.Б.Мигдал. Квантовая физика для больших и маленьких
76. В.С.Гетман. Внуки Солнца
77. Г.А.Гальперин, А.Н.Земляков. Математические бильярды



78. *В.Е.Белонучкин*. Кеплер, Ньютон и все-все-все...
79. *С.Р.Филонович*. Судьба классического закона
80. *М.П.Бронштейн*. Солнечное вещество
81. *А.И.Буздин, А.Р.Зильберман, С.С.Кротов*. Раз задача, два задача...
82. *Я.И.Перельман*. Знаете ли вы физику?
83. *Р.Хонсбергер*. Математические изюминки
84. *Ю.Р.Носов*. Дебют оптоэлектроники
85. *Г.Гамов*. Приключения мистера Томпкинса
86. *И.Ш.Слободецкий, Л.Г.Асламазов*. Задачи по физике (2-е изд.)
87. *Физика и...*
88. *А.В.Спивак*. Математический праздник
89. *Л.Г.Асламазов, И.Ш.Слободецкий*. Задачи и не только по физике
90. *П.Гнэдиг, Д.Хоньек, К.Райли*. Двести интригующих физических задач
91. *А.Л.Стасенко*. Физические основы полета
92. Задачник «Кванта». Математика. Часть 1
93. Математические турниры имени А.П.Савина
94. *В.И.Белотелов, А.К.Звездин*. Фотонные кристаллы и другие метаматериалы
95. Задачник «Кванта». Математика. Часть 2
96. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Физика
97. *А.А.Егоров, Ж.М.Раббот*. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Математика
98. *К.Ю.Богданов*. Прогулки с физикой
99. *П.В.Блиох*. Радиоволны на земле и в космосе
100. *Н.Б.Васильев, А.П.Савин, А.А.Егоров*. Избранные олимпиадные задачи. Математика
101. У истоков моей судьбы...
102. *А.В.Спивак*. Арифметика
103. *Я.А.Смординский*. Температура
104. *А.Н.Васильев*. История науки в коллекции монет
105. *И.Ф.Акулич*. Королевские прогулки
106. Исаак Константинович Кикоин в жизни и в «Кванте»
107. *Г.С.Голицын*. Макро- и микромиры и гармония
108. *П.С.Александров*. Введение в теорию групп
109. *А.В.Спивак*. Арифметика-2



ПРИЛОЖЕНИЕ К ЖУРНАЛУ КВАНТ

№ 1/2009